# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
# Verständnisfragen – Übung 8

| | | |
|---|---|---|
| **VF-1:** Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^*$ so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. | | |
| 1. | Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2. | |
| 2. | Falls $\Vert\Phi'(x^*)\Vert_2 < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\Vert x_0 - x^*\Vert_2$ hinreichend klein. | |
| 3. | $\Vert\Phi'(x^*)\Vert_2 > 1$ ist hinreichend dafür, dass kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ existiert. | |
| 4. | $\Phi(x) = 2\,e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$ und das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$. | |
| 5. | $\Phi(x) = x^5$ hat genau einen Fixpunkt in $[-0.5, 0.5]$ und das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [-0.5, 0.5]$ mit der genauen Konvergenzordnung $p$. Gib $p$ an. | |

| | | |
|---|---|---|
| **VF-2:** Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion $\Phi$ mit Norm $\Vert \cdot \Vert$ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt. | | |
| 1. | Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von $\Phi$. | |
| 2. | Es existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$. | |
| 3. | Für Startwerte $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration für $\Phi$ höchstens mit Konvergenzordnung 1. | |
| 4. | Die Funktion $\Phi$ ist auf $D$ stetig differenzierbar. | |
| 5. | $\Phi(x) = e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$. Gib für das Interval $[0, 1]$ die bestmögliche Kontraktionszahl $L$ an. | |

| **VF-3:** Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! | | |
|---|---|---|
| 1. | Es seien $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Iterationsvorschrift und $x^*$ ein Fixpunkt, d.h. $\Phi(x^*) = x^*$. Dann gilt: $\lvert\Phi'(x^*)\rvert < 1$. | |
| 2. | Es sei $\Phi(x)$ eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, die die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Außerdem gilt $\Phi(x^*) = x^*$ für ein $x^* \in [a, b]$ mit $x^* \neq 0$. Dann konvergiert das Newtonverfahren, angewendet auf $\Phi(x)$ immer für alle Startwerte $x_0 \in [a, b]$ gegen $x^*$. | |
| 3. | Die Konvergenzordnung des Sekanten-Verfahrens ist ungefähr 1.6. | |
| 4. | Das Newton-Verfahren ist global konvergent mit Konvergenzordnung 1 und hat lokal die Konvergenzordnung 2. | |
| 5. | Es sei $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten das Newton-Verfahren zur Annährung der Nullstelle dieser Funktion mit Startwert $x_0 = 1$. Berechne $x_1$. | |

| **VF-4:** Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! | | |
|---|---|---|
| 1. | Das vereinfachte Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren. | |
| 2. | Das Bisektionsverfahren ist ein Fixpunktverfahren. | |
| 3. | Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren. | |
| 4. | Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren. | |
| 5. | Es sei $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annährung der Nullstelle dieser Funktion mit Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Berechne $x_2$. | |