

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18

Verständnisfragen – Übung 9

VF-1: Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$. Wir betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von x^* :

$$x_0 \in U, \quad x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k) \quad \text{für } k \geq 0.$$

Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	Die Newton-Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.	
2.	Die Newton-Methode ist nur lokal quadratisch konvergent, falls man die Berechnung von $(f'(x_k))^{-1}$ vermeidet.	
3.	Wenn $f'(x)$ für alle $x \in U$ regulär ist und das Newton-Verfahren konvergiert, dann gilt für genügend große k 's: $\ x_k - x^*\ \approx \ x_k - x_{k+1}\ $.	
4.	Die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens kann durch Verwendung orthogonaler Transformationen zur Lösung des auftretenden Gleichungssystems beschleunigt werden.	
5.	Es seien $f'(x)$ für alle $x \in U$ regulär und das gedämpfte Newton-Verfahren mit konstantem $\lambda = 0.8$ konvergiere gegen die Nullstelle x^* . Gib die (lokale) Konvergenzordnung p für diesen Fall an.	

VF-2: Es sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x + 3x^2 - x^3$.

1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $(-\infty, 0]$.	
2.	Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von $x^* < 0$, und $x_k, k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Es gilt $ x_k - x^* \approx (x_k - x_{k+1})^2$ für k hinreichend groß.	
3.	Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \leq 0$ gegen eine Nullstelle.	
4.	Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert das Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 3$?	
5.	Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [0.5, 1.5]$ gegen die eindeutige Nullstelle in $[0.5, 1.5]$.	
6.	Mit welcher Konvergenzordnung konvergiert das Newton-Verfahren mindestens für den Startwert $x_0 = 0.5$?	