Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Hausübung 10

VF-1: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Wir nehmen an, dass $\text{Rang}\,(F'(x)) = n$ für alle x. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.	
2.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen quadratisch.	
3.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen nicht schneller als linear.	
4.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren hat den Zweck, die Konvergenzgeschwindigkeit der Gauß-Newton Methode zu beschleunigen.	
5.	Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2\,x\,y-3 \\ 3\,y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestime für $(x_0,y_0) = (0,0)$ (x_1,y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib x_1 an.	

VF-2: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hinreichend oft differenzierbar mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Sei $\phi(x) := \frac{1}{2}F(x)^T F(x)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.	
2.	$\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$.	
3.	$\nabla\phi(x^*) = 0$.	
4.	Die Aufgabe $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$ ist einfacher zu lösen als die Aufgabe $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.	
5.	Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ (2\,y-3)^2 \\ 3\,y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestime für $(x_0,y_0) = (0,0)$ (x_1,y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib y_1 an.	

VF-3: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Wir nehmen an, dass $\text{Rang}\, F'(x) = n$ für alle x. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Ein Gauß-Newton-Verfahren kann mit einer Dämpfungsstrategie kombiniert werden.	
2.	Lokale Maxima oder Sattelpunkte der Funktion $x \mapsto \|F(x)\|_2^2$ sind für das Gauß-Newton-Verfahren immer abstoßend.	
3.	Lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahren in einer Umgebung eines (lokalen) Minimums x^* ist gesichert, falls $\|F(x^*)\|_2$ hinreichend klein ist und alle Komponenten von $F''(x)$ beschränkt sind.	
4.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenzordnung der Methode im Allgemeinen genau 1.	
5.	Es seien $m = 2$ und $n = 1$ sowie $F(x) = \begin{pmatrix} 2\,x-1 \\ 6\,x-4 \end{pmatrix}$. Gib $\|F(x^*)\|_2^2$ an.	

VF-4: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur s^k durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ($\mu > 0$ ein zu wählender Parameter):

1.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2 + \mu\|s^k\|_2 = \min$	
2.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2\|s^k\|_2^2 = \min$	
3.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$	
4.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$	
5.	Es seien $m = 2$, $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \\ 6\,x - 2 \end{pmatrix}$. Gib x^* an.	