

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18

## Verständnisfragen – Hausübung 11

**VF-1:** Es sei  $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$  der Raum der Polynome vom Grade (höchstens)  $n$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ bildet eine Basis von $\Pi_n$ .	
2.	$\{\alpha_0, \alpha_1 x, \alpha_2 x^2, \dots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$ .	
3.	$\{1, x - \alpha_1, (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \dots, \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$ .	
4.	Der Raum $\Pi_n$ hat die Dimension $n$ .	
5.	$\Pi_7$ hat die Dimension $k$ . Gib $k$ an.	

**VF-2:** Sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  mit den Stützstellen  $x_0 < \dots < x_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Seien $l_{jn}$ die Lagrangeschen Fundamentalpolynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{jn}(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ .											
2.	$P(f x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad $n$ mit $a_n \neq 0$ .											
3.	Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$ , $i = 0, \dots, n$ .											
4.	$P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ , $i = 0, \dots, n$ .											
5.	Gegeben sei die Wertetabelle <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: none; padding-right: 5px;"><math>x_i</math></td><td style="border: none; padding: 0 5px;">0</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">1</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">2</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">3</td></tr><tr><td style="border: none; padding-right: 5px;"><math>f_i</math></td><td style="border: none; padding: 0 5px;">1</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">-1</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">5</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">27</td></tr></table> einer Funktion $f$ . Berechne $P(f x_0, x_1, x_2, x_3)(2)$ .	$x_i$	0	1	2	3	$f_i$	1	-1	5	27	
$x_i$	0	1	2	3								
$f_i$	1	-1	5	27								

**VF-3:** Es sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$  mit  $x_0 < \dots < x_n$ .

1.	$P(\Psi x_0, \dots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome $\Psi$ .											
2.	Für beliebige $f$ ist $P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$ .											
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen $f$ gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$ .											
4.	Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]}  P(f x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ wird mit wachsendem $n$ immer kleiner.											
5.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$ .											
6.	Gegeben sei die Wertetabelle <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border: none; padding-right: 5px;"><math>x_i</math></td><td style="border: none; padding: 0 5px;">0</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">1</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">2</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">3</td></tr><tr><td style="border: none; padding-right: 5px;"><math>f_i</math></td><td style="border: none; padding: 0 5px;">1</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">3</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">5</td><td style="border: none; padding: 0 5px;">7</td></tr></table> einer Funktion $f$ . Berechne $P(f x_0, x_1, x_2, x_3)(2.5)$ .	$x_i$	0	1	2	3	$f_i$	1	3	5	7	
$x_i$	0	1	2	3								
$f_i$	1	3	5	7								

**VF-4:** Es sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Interpolationspolynom zu den Daten  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$  mit  $x_0 < \dots < x_n$ , und  $x, x^* \in [x_0, x_n]$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ kann man an der Stelle $x^*$ effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	
2.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	
3.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f x_0, \dots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ .	
5.	Es seien $f(x) = \ln(x) + 2x^2$ und $x_0 = 0.5$ , $x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$ . Bestimme $P(f x_0, x_1, x_2)(1)$ .	