

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18

Verständnisfragen – Hausübung 11

VF-1: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ bildet eine Basis von Π_n .	wahr
2.	$\{\alpha_0, \alpha_1 x, \alpha_2 x^2, \dots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n .	wahr
3.	$\{1, x - \alpha_1, (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \dots, \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n .	wahr
4.	Der Raum Π_n hat die Dimension n .	falsch
5.	Π_7 hat die Dimension k . Gib k an.	8

VF-2: Sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!												
1.	Seien l_{j_n} die Lagrangeschen Fundamentalpolynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{j_n}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.	wahr										
2.	$P(f x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad n mit $a_n \neq 0$.	falsch										
3.	Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.	wahr										
4.	$P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.	wahr										
5.	Gegeben sei die Wertetabelle <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 0 10px;">$\frac{x_i}{f_i}$</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">2</td><td style="padding: 0 5px;">3</td></tr><tr><td style="padding: 0 10px;">f_i</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">-1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</td><td style="padding: 0 5px;">27</td></tr></table> einer Funktion f . Berechne $P(f x_0, x_1, x_2, x_3)(2)$.	$\frac{x_i}{f_i}$	0	1	2	3	f_i	1	-1	5	27	5
$\frac{x_i}{f_i}$	0	1	2	3								
f_i	1	-1	5	27								

VF-3: Es sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$.												
1.	$P(\Psi x_0, \dots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome Ψ .	falsch										
2.	Für beliebige f ist $P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$.	wahr										
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen f gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.	falsch										
4.	Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} P(f x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ wird mit wachsendem n immer kleiner.	falsch										
5.	Für ein festes \bar{x} ist die Auswertung von $P(f x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.	falsch										
6.	Gegeben sei die Wertetabelle <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 0 10px;">$\frac{x_i}{f_i}$</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">2</td><td style="padding: 0 5px;">3</td></tr><tr><td style="padding: 0 10px;">f_i</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</td><td style="padding: 0 5px;">7</td></tr></table> einer Funktion f . Berechne $P(f x_0, x_1, x_2, x_3)(2.5)$.	$\frac{x_i}{f_i}$	0	1	2	3	f_i	1	3	5	7	6
$\frac{x_i}{f_i}$	0	1	2	3								
f_i	1	3	5	7								

VF-4: Es sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$, und $x, x^* \in [x_0, x_n]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	wahr
2.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	falsch
3.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	wahr
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f x_0, \dots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$	wahr
5.	Es seien $f(x) = \ln(x) + 2x^2$ und $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$. Bestimme $P(f x_0, x_1, x_2)(1)$.	2