Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Übung 11

VF-1: Es seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Wert $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.	
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) ω_j gilt: $[x_0, \ldots x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \ldots, n$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und n^2 Subtraktionen.	
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.	
5.	Der Aufwand zur Auswertung des Newtonschen-Interpolationspolynoms mit dem Hornerschema beträgt etwa $\alpha\, n^p$ Operationen. Gib p an.	

VF-2: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$. Weiter sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
2.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) = n!\, \delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
3.	$[x_0, x_1]\, f = f(x_1) - f(x_0)$.	
4.	Mit $f(x) := 2x^4$ gilt $[x_0, \ldots, x_n]\, f = 2$ für alle $n \geq 4$.	
5.	Berechne $[0, 1, 2, 3]\, (5\, x^3 + x - 5)$.	

VF-3: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Weiter sei $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(Q \mid x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_{n-1}, \ldots, x_0)(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})[x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
3.	Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Dann gilt $a_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
4.	Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.	
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 4$. Berechne $P(f \mid x_0, x_1)(\frac{7}{4})$.	