Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Übung 13

VF-1: Seien $f \in C[a, b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ das Integral von f auf $[a, b]$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$ eine Quadraturformel. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Falls die Quadraturformel exakt ist vom Grad n, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	
2.	Die Gewichte ω_i einer Quadraturformel sind immer positiv.	
3.	Sowohl bei den Newton-Cotes Formeln als auch bei der Gauß-Quadratur lassen sich die Gewichte (bei gegebenen Stützstellen) als Integrale der Lagrangen-Fundamentalpolynome berechnen.	
4.	Wegen des höheren Exaktheitsgrades liefern (bei gleicher Stützstellenzahl) Gauß-Formeln immer eine genauere Approximation als Newton-Cotes Formeln.	
5.	Gib den Exaktheitsgrad der Simpsonregel an.	

VF-2: Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch geeignete Quadraturformeln. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel.	
2.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
3.	Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
4.	Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.	
5.	Bestimme mit der Simpsonregel eine Näherung für $\int_{-1}^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.	

VF-3: Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu äquidistanten Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$ approximiert.		
1.	$I_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{m+2}$.	
2.	Es gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$.	
3.	Falls $f \in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt für den Fehler $\lvert I(f) - I_m(f)\rvert \leq \frac{(b-a)^{m+2}}{(m+1)!} \max_{x\in[a,b]} \lvert f^{(m+1)}(x)\rvert$.	
4.	Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung können aufgrund von Auslöschung instabil sein.	
5.	Gib den Exaktheitsgrad der summierten Simpsonregel an.	

VF-4: Es sei $f \in C^\infty([a,b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Es sei $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.		
1.	Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$, wobei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad m ist.	
2.	Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = I(f)$ falls f ein Polynom vom Grad maximal m ist.	
3.	Es sei m fest gewählt. Der Fehler $\lvert I_m(f) - I(f)\rvert$ ist bei einer Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei einer Newton-Cotes Formel.	
4.	Für die Newton-Cotes Formeln gilt $\lvert I_m(f) - I(f)\rvert \to 0$ für $m \to \infty$.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_1^3 x^3$ mit Hilfe der Trapezregel.	

VF-5: Sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Gauss-Formel $\tilde{I}_m(f) := \sum_{i=0}^m \omega_i\, f(x_i)$ approxomiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.	
2.	$\tilde{I}_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$.	
3.	Die Gewichte ω_i sind alle positiv.	
4.	Falls $f \in C^{2m+2}[a,b]$, dann gibt es ein c_m, so dass für den Fehler gilt: $\lvert I(f) - \tilde{I}_m(f)\rvert \leq c_m \max_{x\in[a,b]} \left\lvert f^{(2m+2)}(x)\right\rvert$.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^{10} x^2\,dx$ mit Hilfe von $\tilde{I}_0(f)$.	