Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + x\,(1-x)\,y\,(1-y) \\ \frac{1}{2}\,(1+x-y) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)\;.$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,1] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_1$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ zwei Fixpunktschritte durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) unter Verwendung der $\|\cdot\|_1$-Norm an.

d) Wie viele Iterationsschritte/Fixpunktschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_1$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 3\cdot 10^{-5}$ anzunähern?

zu a)

i) E ist abgeschlossen.

ii) **Selbstabbildung:** Wegen $(x,y) \in [0,1]^2$ gilt $x\,(1-x) \in [0, \frac{1}{4}]$, $y\,(1-y) \in [0, \frac{1}{4}]$ (Parabeln der Form $(x-x_0)\,(x-x_1)$ haben ihr Extremum an der Stelle $(x_0+x_1)/2)$ und $x-y \in [-1,1]$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 0 \le F_1(x,y) &= \frac{1}{4} + x\,(1-x)\,y\,(1-y) \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{16} < 1 \\ 0 = \frac{1}{2}\,(1+(-1)) \le F_2(x,y) &= \frac{1}{2}\,(1+x-y) \le \frac{1}{2}\,(1+1) = 1 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $F(E) \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf $\subset E$.

iii) **Kontraktivität:** Da E konvex ist und F stetig differenzierbar ist, dürfen wir die Ableitung benutzen. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} (1-2\,x)\,y\,(1-y) & (1-2\,y)\,x\,(1-x) \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $(x,y) \in E = [0,1]^2$ gilt (s.o.) $x\,(1-x) \in [0, \frac{1}{4}]$, $y\,(1-y) \in [0, \frac{1}{4}]$ und $1-2\,x \in [-1,1]$ so dass wir durch elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm) erhalten:

$$\|F'(x,y)\|_1 \le \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_1 =: \|F'_{max}\|_1\;.$$

(Hier können wir nur die 1-Norm verwenden, denn $\|F'_{max}\|_\infty = 1$!!). Es ist $\|F'_{max}\|_1 = \frac{3}{4} = 0.75 =: L$; d.h. F ist kontraktiv auf E.

Somit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

(5)

zu b)

Startwert: $x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Schritt: $x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und für c) $x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Schritt: $x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{64} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.296875 \\ 0.375 \end{pmatrix}$, $x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{64} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.046875 \\ -0.125 \end{pmatrix}$

(1)

zu c) Es ist $\|x^1 - x^0\|_1 = 3/4$ und somit gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_1 \le \frac{L^2}{1-L}\,\|x^1 - x^0\|_1 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1-\frac{3}{4}}\cdot\frac{3}{4} = \frac{27}{16} = 1.6875\ (< 1.7)\;.$$

Es ist $\|x^2 - x^1\|_1 = 11/64$ und somit gemäß a-posteriori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_1 \le \frac{L}{1-L}\, \|x^2 - x^1\|_1 = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} \cdot \frac{11}{64} = \frac{33}{64} = 0.515625\ (< 0.52)\ .$$

(2)

zu d) Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^n - x^*\|_1 \le \tfrac{L^n}{1-L}\, \|x^1 - x^0\|_1 \overset{!}{\le} \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{3\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{4}}{3/4}\right)}{\ln\frac{3}{4}} = \frac{\ln 10^{-5}}{\ln(3/4)} = \frac{5\cdot\ln 10}{\ln 4 - \ln 3} = 40.01\ldots \quad .$$

Es sind also höchstens $n = 41$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 3\cdot 10^{-5}$ zu erreichen.

(1)