Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Normen, Taylorreihen, Kondition eines Problems

A. Reusken

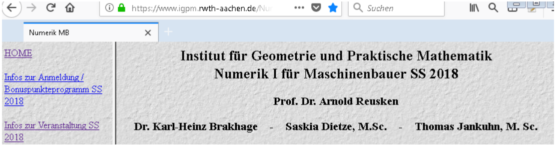
K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Einstieg

Homepage: www.igpm.rwth-aachen.de/Numa/NumaMB



Folien zur Vorlesung

Hinweise zur Anmeldung SS 2018

Bonuspunkteprogramm SS 2018

Informationen zur aktuellen Veranstaltung SS 2018

Literatur

Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
(2. Auflage)

Wolfgang Dahmen und Arnold Reusken

Springer Verlag, ISBN 3-540-76492-2

1. Auflage: ISBN 3-540-25544-3

Minitests/Bonuspunkte

Bis zu sechs Punkte der Klausur (10%) kann man durch Erfüllung der folgenden Bedingungen erreichen:

1. fristgerechte Anmeldung zu den Kleingruppen
2. maximal zwei Fehltermine in der zugeteilten Gruppe

Punktvergabe bei den beiden Minitests:

Ab Prozent	*25%*	*37.5%*	*50%*	*62.5%*	*75%*	*87.5%*
Bonuspunkte	*0.5*	*1.0*	*1.5*	*2.0*	*2.5*	*3.0*

Anzahl der Punkte wird dann addiert und auf eine ganze Zahl gerundet.

Die Art der ***Minitests entspricht*** in etwa dem ***Verständnisfragen-Teil der Klausur.***

Statistik

Ergebnisse der Klausur SS 2013

Bonuspunkte	% bestanden
$\geq \mathbf{3}$ (# 90)	100 %
$\mathbf{2}$ (# 130)	90 %
$\mathbf{1}$ (# 250)	85 %
$\mathbf{0}$ (# 450)	65 %

Inhaltsangabe

1. Einleitung
2. Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität
3. Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren
4. Lineare Ausgleichsrechnung
5. Nichtlineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren
6. Nichtlineare Ausgleichsrechnung
7. Berechnung von Eigenwerten
8. Interpolation
9. Splinefunktionen
10. Numerische Integration
11. Gewöhnliche Differentialgleichungen
12. Partielle Differentialgleichungen
13. Große dünnbesetzte lineare Gleichungssysteme
14. Numerische Simulationen: Vom Pendel bis zum Airbus

Ziele der Vorlesung

Für unterschiedliche Problemstellungen (Lösen eines linearen Gleichungssystems, Berechnung eines Integrals,....) werden folgende Themen behandelt:

1. Kondition (= Empfindlichkeit für Störungen) eines Problems
2. Wichtige numerische Lösungsverfahren
3. Stabilität (= Empfindlichkeit für Störungen) der Lösungsverfahren.
4. Effizienz (= Anzahl der Rechenoperationen [Speicherbedarf]) der Lösungsverfahren.

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 2.1

- Grundlagen: Normen und Taylor-Entwicklung
- Kondition eines Problems

Was Sie mitnehmen sollten:

- Grundbegriffe: Normen, Taylor-Entwicklung
- Was ist die (relative) Kondition eines Problems?
- Wie wird Kondition eines Problems berechnet?
- Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

Normierte Räume

Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf V, falls $\forall v \in V$ gilt:

- $\|v\| \geq 0$, und $\|v\| = 0$ nur wenn $v = 0$.
- Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\|\alpha\, v\| = |\alpha|\, \|v\|$
- Für alle $v, w \in V$ gilt die Dreiecksungleichung

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Wenn eine Norm auf V definiert ist, nennt man V oft einen linearen normierten Raum.

Vektornormen

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$ wird eine Norm definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Speziell:

- 1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- ∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$
- 2-Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (Euklidische Norm)

$\Rightarrow$ 2-Norm wird durch ein Skalarprodukt induziert.

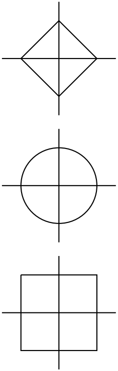
Vektornormen

Einheitskreise in $\mathbb{R}^2$: $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x^T x}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |x_i|$$



Matrixnormen

Die induzierte Matrixnorm $\|A\|$

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert.

Beachte

Definition gilt entsprechend auch für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Matrixnormen

Die induzierte Matrixnorm $\|\boldsymbol{A}\|$

Definition

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert.

Es gilt:

- $\|\boldsymbol{A}\| \geq \boldsymbol{0}$, und $\|\boldsymbol{A}\| = \boldsymbol{0}$ nur wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.
- Für alle $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$: $\|\boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{A}\| = |\boldsymbol{\alpha}|\, \|\boldsymbol{A}\|$
- Dreiecksungleichung:

$$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$$

Matrixnormen

Die induzierte Matrixnorm $\|A\|$

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert.

und:

- $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$
- $\|I\| = 1$

Matrixnormen

Aus der Definition ergeben sich folgende Formeln:

- 1-Norm: (max. Spaltensumme)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- ∞-Norm: (max. Zeilensumme)

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 2-Norm: (Spektralnorm)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Matrixnormen

Beispiel

Für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = 4, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 5, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + 5\sqrt{5}\right)},$$

denn die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ kann man über

$$\det(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0 \iff (5-\lambda)(10-\lambda) - 25 = 0$$

bestimmen und damit

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(15 - 5\sqrt{5}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(15 + 5\sqrt{5}\right).$$

Landau-Symbol

Landau-Symbol $\mathcal{O}$

Betrachte zwei Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir verwenden die Notation

$$g(x) = \mathcal{O}\left(h(x)\right) \qquad (x \to x_0)$$

wenn es Konstanten $C > 0$ und $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|g(x)| \leq C|h(x)|, \qquad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

- Anschauliche Bedeutung:
  g wächst nicht wesentlich schneller als h

  (in einer Umgebung von x_0)

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Entwicklung (von f um x)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(\tilde{x} - x)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}(\tilde{x} - x)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(\tilde{x} - x)^k, \end{aligned}$$

wobei ξ eine Zahl zwischen $\tilde{x}$ und x ist.

$f^{(n)}(x)$ ist die n-te Ableitung von f, z.B.,

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Polynom vom Grad $k-1$ (in Variable $\tilde{x}$)

$$
\begin{aligned}
p_{k-1}(\tilde{x}) &= f(x) + f'(x)\,(\tilde{x}-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(\tilde{x}-x)^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}(\tilde{x}-x)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

- Für $k = 1$ erhält man den Mittelwertsatz
$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} = f'(\xi),$$
wobei ξ eine Zahl zwischen $\tilde{x}$ und x ist.
- Oft verwendete Darstellung
$$f(\tilde{x}) = p_{k-1}(\tilde{x}) + \mathcal{O}(|\tilde{x} - x|^k) \qquad (\tilde{x} \to x)$$

Matlab-Demo

Taylor-Entwicklung: Vektorwertige Funktionen

Taylor-Entwicklung (von f um x)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} (\tilde{x}_j - x_j) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} (\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_j - x_j) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

- Gradient: $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$
- Hesse-Matrix: $f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$

Taylor-Entwicklung: Vektorwertige Funktionen

Kompakte Schreibweise

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tilde{x} - x)^T f''(x)(\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

oder

$$f(\tilde{x}) = f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^2).$$

Falls $\|\tilde{x} - x\| \ll 1$:

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x)$$

$\doteq$: Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt.

Fehlerquellen

Fehler im Resultat auf Grund von

- Datenfehlern (oder Eingabefehlern)

  $\Rightarrow$ Kondition eines Problems

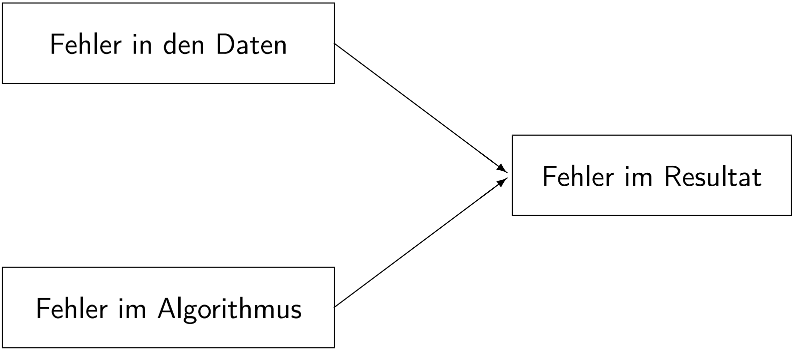
  – können häufig nicht vermieden werden

- Fehler(akkumulation) im Algorithmus (z.B. Rundungsfehler)

  $\Rightarrow$ Stabilität eines Algorithmus

  – kann man beeinflussen durch Anpassung des Verfahrens

Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität



Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

Konzept der Kondition eines Problems

Beachte: Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Wir fassen den “mathematischen Prozeß” oder das “Problem” als Aufgabe auf, eine gegebene Funktion

$$f : X \to Y$$

an einer Stelle $x \in X$ auszuwerten.

Elementare Beispiele

- Die Berechnung der Multiplikation von x_1 und x_2:

  $$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

  und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.

- Die Berechnung der Summe von x_1 und x_2:

  $$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

  und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.

Elementare Beispiele

- Man bestimme die kleinere Nullstelle der Gleichung

$$y^2 - 2\,x_1\,y + x_2 = 0,$$

mit $x_1^2 > x_2$. Die Lösung y^* ist

$$y^* = f(x_1, x_2) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}.$$

mit

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 > x_2\right\},$$

$$Y = \mathbb{R}.$$

Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden:

$$G_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 = x_1\}$$
$$G_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 = x_2\}$$

wobei $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $a_{i,j}$ gegeben seien.

Mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$Ay = x.$$

Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden: (Fortsetzung)

  Es gilt also

  $$Ay = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$$

  Annahme: $\det A \neq 0$
  Dann ist y durch

  $$y = A^{-1}x$$

  gegeben. Also Auswertung der Funktion

  $$f(x) = A^{-1}x,$$

  d.h. $X = Y = \mathbb{R}^2$.

Begriff der Kondition

Ungestörtes Problem

$$\underbrace{x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \underbrace{y = f(x)}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

Gestörtes Problem

$$\tilde{x} = x + \Delta x \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \tilde{y} = f(\tilde{x})$$

mit Eingabefehler $\Delta x = \tilde{x} - x$

Ausgabefehler $\Delta y = \tilde{y} - y = f(\tilde{x}) - f(x)$

Ziel: Verhältnis Ausgabefehler Δy zu Eingabefehler Δx.

Begriff der Kondition

Absoluter/relativer Fehler:

- absoluter Eingabefehler: $\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}$
- absoluter Ausgabefehler: $\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}$
- relativer Eingabefehler: $\boldsymbol{\delta_x} = \dfrac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}}}$
- relativer Ausgabefehler: $\boldsymbol{\delta_y} = \dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{Y}}}$

Begriff der Kondition

Definition

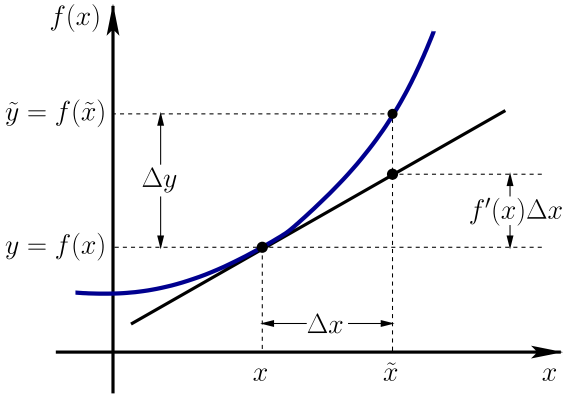
Mit der relativen Kondition eines (durch f beschriebenen) Problems bezeichnet man das Verhältnis

$$\frac{\delta_y}{\delta_x}$$

des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

- Absolute Kondition: Verhältnis $\frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X}$
- Mit Kondition wird meistens die relative Kondition gemeint.
- Ein Problem ist umso besser konditioniert, je kleinere Schranken für δ_y/δ_x (mit $\delta_x \to 0$) existieren.

Taylor-Entwicklung 1. Ordnung



Kondition: Verhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$ bzw. $\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$.

Kondition: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Taylor-Entwicklung 1. Ordnung von f um x

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x)$$

Daraus erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Skalar, Ausgabe: Skalar)

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \ \doteq \ \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

mit

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) := \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right|.$$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylor-Reihenentwicklung 1. Ordnung

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + \left(\nabla f(x)\right)^T (\tilde{x} - x)$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Hieraus folgt

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)} \right) \cdot \left(\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right)$$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Mit den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

erhält man

$$\underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\substack{\text{relativer Fehler} \\ \text{der Ausgabe}}} \doteq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\phi_j(x)}_{\substack{\text{Fehler-} \\ \text{verstärkung}}} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}}_{\substack{\text{relativer Fehler} \\ \text{der Eingabe in } x_j}}$$

Kondition $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Skalar)

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \dot{\leq} \kappa_{\text{rel}}(x) \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right|$$

mit

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \kappa_{\text{rel}}^{\infty}(x) := \max_j |\phi_j(x)|$$

und den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

wobei $\dot{\leq}$ entsprechend $\doteq$ zu verstehen ist.

Beispiel 2.12.

Gegeben sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Relative Konditionszahl:

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\,x^2.$$

$\rightsquigarrow$ für $|x|$ klein/groß ist f gut/schlecht konditioniert.

Beispiel

- $x = 0.1,\ \tilde{x} = 0.10001$: $\kappa_{\text{rel}}(0.1) = 6 \cdot 10^{-2}$

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 6.03 \cdot 10^{-6}$$

- $x = 4,\ \tilde{x} = 4.0004$: $\kappa_{\text{rel}}(4) = 96$

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 9.65 \cdot 10^{-3}$$

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 \, x_2$

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = 1 \text{ (von } x \text{ unabhängig!)}$$

Multiplikation für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
Ein ähnliches Resultat gilt für die Division.

- Addition: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 + x_2$

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \max \left\{ \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right|, \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \right\}$$

Bei zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen: $\kappa_{\text{rel}} \leq 1$.

ABER: $\kappa_{\text{rel}}(x) \gg 1$ wenn $x_1 \approx -x_2$.

Beispiel 2.15. (Nullstelle)

Bestimmung der kleineren Nullstelle y^* von $y^2 - 2x_1 y + x_2 = 0$:

$$x = (x_1, x_2)^T, \qquad y^* = f(x) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}$$

- Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2} - x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} = \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

- Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

Beispiel 2.15. (Nullstelle)

- Verstärkungsfaktoren

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_1}{y^*} = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_2}{y^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi_1(x)\end{aligned}$$

- Kondition: $\kappa_{\text{rel}}(x) = \max_j |\phi_j(x)|$

Kondition hängt stark von der Stelle (x_1, x_2) ab:

- Wenn $x_2 < 0$: $|\phi_1(x)| \leq 1$ und $\kappa_{\text{rel}}(x) \leq 1$
- Wenn $x_2 \approx x_1^2$: $|\phi_1(x)| \gg 1$ und $\kappa_{\text{rel}}(x) \gg 1$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f linear

Wir haben

$$y = f(x) = A^{-1}x$$

bzw. für gestörte Daten

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}) = A^{-1}\tilde{x}$$

und damit

$$f(\tilde{x}) - f(x) = A^{-1}\tilde{x} - A^{-1}x = A^{-1}(\tilde{x} - x)$$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f linear

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Vektor)

$$\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \le \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\kappa(A)} \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

wobei

$$\kappa(A) \equiv \|A\|\|A^{-1}\|$$

die Konditionszahl der Matrix A ist.

Beispiel 2.28.

Die Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden

$$\begin{aligned} 3\,u_1 + 1.001\,u_2 &= 1.999 \\ 6\,u_1 + 1.997\,u_2 &= 4.003. \end{aligned}$$

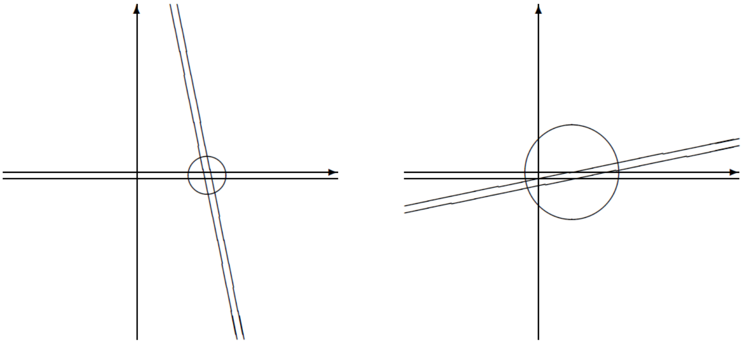
(fast parallel!) ergibt das Problem $u = A^{-1}b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.28. Kondition bei Bestimmung eines Schnittpunktes



Beispiel 2.28.

Effekt einer Störung in $\boldsymbol{b}$:

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2.002} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Man erhält

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 0.4004 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Maximumnorm:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |\boldsymbol{x}_i|.$$

Beispiel 2.28.

Es gilt

- Störung der Daten

$$\frac{\|\tilde{b}-b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{3 \times 10^{-3}}{4.003} \approx 7.5 \times 10^{-4}$$

- Änderung des Resultats

$$\frac{\|\tilde{u}-u\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \frac{1.8}{1} \approx 1.8$$

Schlechte Kondition wird quantifiziert durch

$$\|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty = 4798.2.$$

Zusammenfassung

Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Frage:

- Was ist die (relative) Kondition eines Problems?

$\Rightarrow$ Die relative Kondition eines Problems bezeichnet das Verhältnis des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

Zusammenfassung

Wie wird die Kondition analysiert?

- Wir haben folgende Fälle betrachtet
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f linear

Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

- Multiplikation und Division sind für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
- Addition $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ist
  - gut konditioniert, wenn beide Zahlen das gleiche Vorzeichen haben;
  - sehr schlecht konditioniert, wenn $x_1 \approx -x_2$.

Verständnisfragen

- ☐ Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur numerischen Lösung des Problems.
- ☐ Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.
- ☐ Die Funktion $f(x) = x \cdot \ln(x)$ ist schlecht konditioniert für alle x mit $0 < |x| \ll 1$.

Sei $\kappa_{\text{rel}}(x)$ die Kondition der Funktion $f(x) = x^3 \ln(x)$.
Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \kappa_{\text{rel}}(x)$. $\boxed{3}$