

Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Lineare Gleichungssysteme

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 3.4-3.6

- ▶ Dreiecksmatrizen
- ▶ Gauß-Elimination und LR-Zerlegung
- ▶ Cholesky-Zerlegung

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie rechnet man mit Dreiecksmatrizen?
- ▶ Wie funktioniert die LR-Zerlegung?
- ▶ Warum benötigt man Pivotisierung?
- ▶ Was ist die Cholesky-Zerlegung?

Beispiel 3.16.

Löse das Gleichungssystem $Rx = b$, wobei

$$R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von R erlaubt eine einfache Lösung:

$$x_3 = 4/2 = 2$$

$$x_2 = 1 - 3 \cdot 2 = -5$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(0 - (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 2) = -3$$

⇒ Rückwärtseinsetzen

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Definition

Eine Matrix $R = (r_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, falls

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{für } i > j$$

gilt.

Allgemeiner Fall:

$$\begin{array}{rcccccc}
 r_{1,1} x_1 & + & r_{1,2} x_2 & + & \dots & + & r_{1,n} x_n & = & b_1 \\
 & & r_{2,2} x_2 & + & \dots & + & r_{2,n} x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & r_{n-1,n-1} x_{n-1} & + & r_{n-1,n} x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & & & & & & r_{n,n} x_n & = & b_n
 \end{array}$$

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Lösbarkeit

Da $\det R = r_{1,1}r_{2,2} \cdots r_{n,n}$ gilt, ist

$$R x = b$$

genau dann stets eindeutig lösbar, wenn alle Diagonaleinträge $r_{j,j}$, $j = 1, \dots, n$, von Null verschieden sind.

Vorgehen:

- ▶ Beginnend bei der letzten Gleichung

$$x_n = b_n / r_{n,n}.$$

- ▶ Einsetzen von x_n in die zweitletzte Gleichung

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - r_{n-1,n}x_n) / r_{n-1,n-1}.$$

- ▶ ...

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Rückwärtseinsetzen

Für $j = n, n - 1, \dots, 2, 1$ berechne

$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^n r_{j,k} x_k \right) / r_{j,j}$$

wobei die Summe für $j = n$ leer ist und als Null interpretiert wird.

Analog: untere Dreiecksmatrix L

- ▶ $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $l_{i,j} = 0$ für $i < j$
- ▶ Eindeutig lösbar, wenn $l_{j,j}$, $j = 1, \dots, n$, von Null verschieden
- ▶ Vorwärtseinsetzen

Rechenaufwand

Für jedes $j = n - 1, \dots, 1$:

1. $n - j$ Multiplikationen | Additionen,
2. eine Division,
3. und für $j = n$ eine Division.

Also insgesamt:

- ▶ $\sum_{j=1}^{n-1} (n - j) = \frac{n(n - 1)}{2}$ Additionen | Multiplikationen,
- ▶ n Divisionen.

Rechenaufwand für Rückwärtseinsetzen

$$\text{ca. } \frac{1}{2}n^2 \text{ Operationen}$$

Operation = Multiplikation oder Division.

Eigenschaften 3.18.

- ▶ Das Produkt von oberen (unteren) Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- ▶ Die Inverse einer oberen (unteren) nichtsingulären Dreiecksmatrix ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- ▶ Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gerade das Produkt aller Diagonaleinträge.
- ▶ Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind gerade die Diagonaleinträge.

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\det A \neq 0$) und $b \in \mathbb{R}^n$, bestimme $x \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$Ax = b.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von A , so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Verfahren:

- ▶ LR-Zerlegung: $PA = LR$, wobei L untere Dreiecksmatrix, R obere Dreiecksmatrix
- ▶ Cholesky-Zerlegung: $A = LDL^T$, wobei D Diagonalmatrix
- ▶ QR-Zerlegung: $A = QR$, wobei Q orthogonale Matrix

Gauß-Elimination: LR-Zerlegung

Die bekannteste Methode, das System

$$Ax = b \quad (\det A \neq 0)$$

auf Dreiecksgestalt zu bringen, ist die **Gauß-Elimination**.

$$A = A^{(1)}$$

⊗	*	*
*	*	*
⋮	⋮			⋮
⋮	⋮			⋮
*	*	*

$$A^{(2)}$$

*	*	*
0	⊗	*
⋮	⋮	$\tilde{A}^{(2)}$		⋮
⋮	⋮			⋮
0	*	*

$$A^{(3)}$$

*	*	*	...	*
0	*	*	...	*
0	0	⊗	...	*
⋮	⋮	⋮	$\tilde{A}^{(3)}$	⋮
0	0	*	...	*

- ▶ Einträge der Matrix $A^{(k)}$ werden mit $a_{i,j}^{(k)}$ notiert.
- ▶ Der Eintrag $a_{j,j}^{(j)}$ (⊗ oben) heißt **Pivotelement**.
- ▶ In entsprechender Weise ist auch die rechte Seite b umzuformen.

Beispiel 3.19.

Löse das Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Gauß-Elimination.

Wir benutzen die folgende Notation

$$\rightarrow (A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array} \right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- ▶ 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i
 $j = 1$

$$\begin{aligned} \ell_{2,1} &= \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} &= \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} &= \frac{-2}{2} \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array} \right)$$

- ▶ 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i
 $j = 2$

$$\begin{aligned} \ell_{3,2} &= \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} &= \frac{-6}{2} \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{array} \right)$$

Beispiel 3.19.

- ▶ 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$j = 3$$

$$\ell_{4,3} = \frac{10}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array} \right) = (R | c)$$

Wegen $Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$ liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(-\frac{9}{2}, 2, -3, 1 \right)^T.$$

Gauß-Elimination ohne Pivotisierung

- ▶ Bestimme $(A | b) \rightarrow (R | c)$
- ▶ Löse $Rx = c$

Beispiel 3.22.

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A = L R,$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}$$

die bei der Gauß-Elimination berechneten Dreiecksmatrizen sind.

Zusammenfassung

Ein bemerkenswertes “Nebenprodukt” der Gauß-Elimination ist also eine **Faktorisierung** von A in ein Produkt einer normierten unteren Dreiecksmatrix L und oberen Dreiecksmatrix R .

Satz 3.21.

Sind im Gauß-Algorithmus **stets alle Pivotelemente ungleich null**, dann erhält man

$$A = L R,$$

wobei R eine obere Dreiecksmatrix und L eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

Frage:

- ▶ Was passiert, wenn das Pivotelement identisch null ist?
- ▶ Was passiert, wenn das Pivotelement “sehr klein” ist?

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- ▶ Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet **nicht**, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- ▶ Bei verschwindendem Pivotelement ist das Vertauschen von Zeilen notwendig.
- ▶ Selbst wenn das Pivotelement ungleich null, ist eine Vertauschung von Zeilen angebracht, um die **Stabilität** der Gauß-Elimination (bzw. **LR**-Zerlegung) zu verbessern.

Beispiel 3.23.

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Mit $l_{2,1} = 1/0.00031$ ergibt die Gauß-Elimination

$$(R | c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & 1 - \frac{1}{0.00031} & -7 - \frac{-3}{0.00031} \end{array} \right),$$

und bei 4-stelliger Rechnung schließlich

$$(R | c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & -3225 & 9670 \end{array} \right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert dann ...

Beispiel 3.23.

$$\tilde{x}_1 \approx -6.452, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.998.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\dots, \quad x_2 = -2.998759\dots,$$

d.h., \tilde{x}_1 ist auf keiner Stelle korrekt.

Dieses Ergebnis ist *unakzeptabel*, weil die Kondition des Problems sehr gut ist: $\kappa_\infty(A) = 4.00$.

Nach **Spaltenpivotisierung** mit 4-stelliger Rechnung erhält man

$$(R | c) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0.9997 & -2.998 \end{array} \right)$$

und damit

$$\tilde{x}_1 \approx -4.001, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.999,$$

also völlig akzeptable Werte.

Permutationsmatrix

Sei $P_{i,j}$ die elementare Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i -ten und j -ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Beispiel

Für $n = 4$, $i = 2$, $j = 4$ erhält man

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die folgenden Resultate

$$\det P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ -1 & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

und

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}.$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

$$P_{2,3} A P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der Einträge } a \text{ und } b$$

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung

Gauß-Elimination **mit** Spaltenpivotisierung ist für **jede** nicht-singuläre Matrix durchführbar und es gilt folgende Verallgemeinerung von Satz 3.21..

Satz 3.25.

Zu jeder nichtsingulären Matrix A existiert eine Permutationsmatrix P , eine (dazu) eindeutige untere normierte Dreiecksmatrix L , deren Einträge sämtlich betragsmäßig durch 1 beschränkt sind, und eine eindeutige obere Dreiecksmatrix R , so dass

$$PA = LR.$$

Die Matrizen P , L und R ergeben sich aus der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung.

Durchführung der LR-Zerlegung

Skalierung und Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- ▶ Bestimme die Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

so dass DA zeilenweise äquilibriert ist, d.h.

$$d_i = \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- ▶ Wende Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung auf DA an.

Aufwand

- ▶ Zeilensummenberechnung: $n(n - 1)$ Additionen;
- ▶ Berechnung der Skalierung: n Divisionen;
- ▶ Für $j = 1, 2, \dots, n - 1$ Berechnung der neuen Einträge
 - ▶ in L : $(n - j)$ Divisionen
 - ▶ in R : $(n - j)^2$ Multiplikationen | Additionen

Dominierender Aufwand: $\sum_{j=1}^{n-1} (n - j)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim n^3/3$.

Rechenaufwand 3.29.

LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung kostet ca.

$$\frac{1}{3}n^3 \text{ Operationen.}$$

Die Skalierung (falls nötig) kostet nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

Beispiel 3.30.

Zeilenäquilibrierung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.30.

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.30.

Man rechnet einfach nach, dass

$$LR = PDA$$

gilt, wobei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix P ist das Produkt von $P_{2,3}$ und $P_{1,3}$.

Merke

- ▶ Skalierung/Äquilibrierung verbessert die "*Konditionszahl der Matrix*".
- ▶ Pivotisierung verbessert die **Stabilität** der Gauß-Elimination/*LR*-Zerlegung.

Anwendungen der LR-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die schon zeilenweise äquilibriert ist.
Sei für diese Matrix die LR-Zerlegung $PA = LR$ bekannt.

1. Lösen eines Gleichungssystems

Die Lösung von

$$Ax = b$$

ergibt sich über die Lösung zweier Dreieckssysteme

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff L \underbrace{Rx}_{=y} = Pb$$

- ▶ Bestimme y durch Vorwärtseinsetzen aus $Ly = Pb$.
- ▶ Berechne x aus $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen x^k des linearen Gleichungssystems

$$A x^k = b^k, \quad k = 1, \dots, K,$$

wobei A eine konstante Matrix ist und b^k , $k = 1, \dots, K$, verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Vorgehen

- ▶ Bestimme (einmalig) LR-Zerlegung von A , d.h.

$$P A = L R$$

- ▶ Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für jede rechte Seite

$$\begin{aligned} L y^k &= P b^k \\ R x^k &= y^k \end{aligned}$$

Aufwand: $\frac{1}{3}n^3 + Kn^2$ (vs. $K\frac{1}{3}n^3$ ohne LR-Zerlegung)

Anwendungen der LR-Zerlegung

3. Berechnung der Inversen

Sei $x^i \in \mathbb{R}^n$ die i -te Spalte der Inversen von A :

$$A^{-1} = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n).$$

Aus $AA^{-1} = I$ folgt

$$Ax^i = e^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zur Berechnung der Inversen bietet sich folgende Strategie an:

- ▶ Bestimme die LR-Zerlegung $PA = LR$ über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung,
- ▶ Löse die Gleichungssysteme

$$LRx^i = Pe^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Gesamtaufwand: etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

4. Berechnung von Determinanten

Aus $PA = LR$ folgt

$$\det P \det A = \det L \det R = \det R.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det P &= \det P_{n,r_n} \cdots \det P_{n-1,r_{n-1}} \\ &= (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}}, \end{aligned}$$

folgt

$$\det A = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} \prod_{j=1}^n r_{j,j}.$$

Symmetrisch positiv definite Matrix

Definition 3.31.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **symmetrisch positiv definit** (s.p.d.), falls

$$A^T = A \quad (\text{Symmetrie})$$

und

$$x^T A x > 0 \quad (\text{positiv definit})$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, gilt.

Tritt bei vielen (physikalischen) Problemen auf:

- ▶ Netzwerke mit passiven Komponenten
- ▶ Diffusions-/Wärmeleitungsgleichung
- ▶ Normalgleichung (Lineare Ausgleichsrechnung)
- ▶ ...

Beispiel 3.32.

1. $A = I$ (Identität) ist symmetrisch positiv definit.

Die Symmetrie ist trivial und

$$x^T I x = x^T x = \|x\|_2^2 > 0,$$

falls $x \neq 0$.

2. Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, und B habe vollen Rang.

Dann ist

$$A := B^T B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

s.p.d., denn:

$$A^T = (B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B = A.$$

Beispiel 3.32.

2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Dann gilt

$$x^T A x = x^T B^T B x = (Bx)^T (Bx) = \|Bx\|_2^2 \geq 0.$$

Es gilt

$$x^T A x = \|Bx\|_2^2 = 0$$

nur falls

$$Bx = 0$$

gilt. Da B vollen Rang hat, muss daher

$$x = 0$$

sein.

Satz 3.33.

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei s.p.d. Dann gelten folgende Aussagen:

- ▶ \mathbf{A} ist invertierbar, und \mathbf{A}^{-1} ist s.p.d.
- ▶ \mathbf{A} hat nur strikt positive (insbesondere reelle) Eigenwerte.
- ▶ \mathbf{A} hat nur strikt positive Diagonaleinträge und der betragsgrößte Eintrag von \mathbf{A} liegt auf der Diagonalen.
- ▶ Bei Gauß-Elimination ohne Pivotisierung sind alle Pivotelemente strikt positiv.

Satz 3.34.

Jede s.p.d. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$A = LDL^T,$$

wobei L eine normierte untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen

$$d_{i,i} > 0, i = 1, \dots, n,$$

ist. Umgekehrt ist jede Matrix der Form LDL^T , wobei D eine Diagonalmatrix ist, die $d_{i,i} > 0$ erfüllt, und L eine normierte untere Dreiecksmatrix ist, symmetrisch positiv definit.

Beachte:

Aufgrund von Satz 3.33 ist bei s.p.d. Matrizen Gauß-Elimination **ohne Pivotisierung** durchführbar. \Rightarrow "Symmetrische" LR-Zerlegung

Zusammenfassung

- ▶ Dreiecksmatrizen ergeben leicht lösbare Systeme:
Aufwand ca. $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.
- ▶ Zeilenskalierung vs. Pivotisierung
 - ▶ **Skalierung/Äquilibrierung** verbessert die "*Konditionszahl der Matrix*". (sogenannte Vorkonditionierung)
 - ▶ **Pivotisierung** verbessert die **Stabilität** der Gauß-Elimination/
LR-Zerlegung.
- ▶ LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung:
stabile und effiziente Methode, Aufwand $\sim \frac{1}{3}n^3$
- ▶ A s.p.d. \Leftrightarrow es existiert eine Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$.

Verständnisfragen

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

- f** Es sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $Ry = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $n^3/3$ Operationen.
- w** Es existieren stets eine Permutationsmatrix P , eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R , so dass $PA = LR$ gilt.
- w** Sei $PA = LR$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det A = \det R$ oder $\det A = -\det R$.

Verständnisfragen

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

W Ohne Pivotisierung ist die Gauß-Elimination nicht für jedes A durchführbar.

Es seien $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\|D\|_2$. **0.25**