Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Nichtlineare Gleichungssysteme I

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 5.1-5.4

- Einleitung: Problemstellung
- Kondition des Nullstellenproblems
- Fixpunktiteration
- Banachscher Fixpunktsatz

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie funktioniert die Fixpunktiteration
- Aussagen des Banachschen Fixpunktsatzes
- Wie wendet man den Banachschen Fixpunktsatz an

Motivation

1. Die meisten Probleme in der Praxis führen auf nichtlineare Gleichungssysteme
2. Je genauer das (mathematische) Modell ist, desto eher ist es nichtlinear:
   - Pendelschwingung: Auslenkungswinkel φ beschrieben durch

     $$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0 \quad \text{vs.} \quad \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\sin\big(\varphi(t)\big) = 0$$

     für kleine vs. große Auslenkungen.
   - Lineare vs. nichtlineare Diffusion: Temperatur u beschrieben durch

     $$u_t = \operatorname{div}(k\,\nabla u) \quad \text{vs.} \quad u_t = \operatorname{div}\big(k(u)\,\nabla u\big)$$

     mit Wärmeleitfähigkeit $k(u) = c_1 + c_2 u + c_3 u^3$.
   - Strömungsprobleme, Netzwerkanalyse, ...

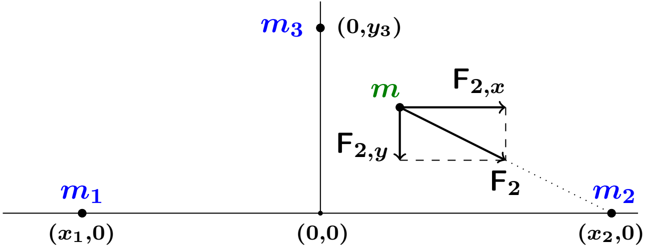
Beispiel 5.1.

Für die Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen M_1 und M_2 mit gegenseitigem Abstand r gilt:

$$F = G \cdot \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$Nm^2/kg.

Das Gravitationsfeld sei wie folgt:



Beispiel 5.1.

Gesucht: (x, y), so dass für eine Punktmasse m an der Stelle (x, y) die Gravitationskräfte F_i zwischen m und m_i, $i = 1, 2, 3$, im Gleichgewicht sind.

Hilfsgrößen mit $i = 1, 2, 3$ sind

$$r_i := \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

$$F_i := G \cdot \frac{m_i m}{r_i^2}$$

$$F_{i,x} := \frac{F_i(x_i - x)}{r_i}$$

$$F_{i,y} := \frac{F_i(y_i - y)}{r_i}$$

Beispiel 5.1.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind wie folgt:

$$F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = 0 \quad \text{und} \quad F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0$$

Hieraus ergibt sich das System

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i(x_i - x)}{\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)^{3/2}} = 0 \\ f_2(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i(y_i - y)}{\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)^{3/2}} = 0. \end{aligned}$$

Beispiel 5.2.

Statt der linearen Integralgleichung im Beispiel 3.3.

$$u(x) + 2\int_0^1 \cos(xt)\, u(t)\, dt = 2, \quad x \in [0,1]$$

ist nun eine nichtlineare Integralgleichung zu lösen:

Gesucht ist eine Funktion $u(x) \geq 0$, die die Integralgleichung

$$u(x) + 2\int_0^1 \cos(xt)\, u(t)^3\, dt = 2, \quad x \in [0,1]$$

erfüllt.

Beispiel 5.2.

Das Problem wird, wie in Beispiel 3.3., auf dem Gitter

$$t_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) h, \quad j = 1, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n}.$$

diskretisiert.

Man erhält dann die Gleichungen

$$u_i + 2\,h \sum_{j=1}^{n} \cos(t_i\, t_j)\, u_j^3 = 2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

für die Unbekannten $u_i \approx u(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Problemstellung

Aufgabe

Zu gegebenem $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestimme $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$,

so dass

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1^*, \ldots, x_n^*) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1^*, \ldots, x_n^*) & = & 0 \end{array}$$

erfüllt ist.

Kompakte Darstellung:

$$f(x^*) = 0$$

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

- Lineare Gleichungssysteme: Sonderfall dieser Problemstellung

$$A\,x^* = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x^*) = A\,x^* - b = 0.$$

- Der Spezialfall $n = 1$ wird oft als skalare Gleichung in *einer* Unbekannten bezeichnet.
- Hat man mehr (nichtlineare) Gleichungen als Unbekannte, d.h.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ mit } m > n$$

erhält man ein nichtlineares Ausgleichsproblem

$\rightsquigarrow$ siehe nächstes Kapitel.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

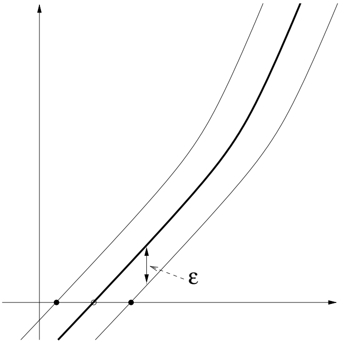
Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

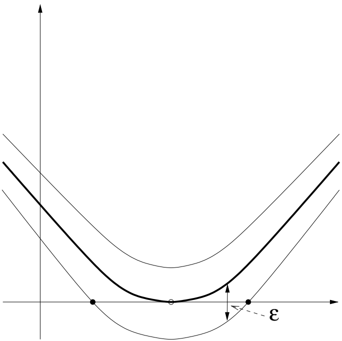
Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?
- Unter welchen Bedingungen konvergiert das Verfahren?
- Wie schnell konvergiert das Verfahren?
- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



einfache Nullstelle



mehrfache Nullstelle

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Störungen in den Daten (Funktionswerten)

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

- Sei $\tilde{x}^*$ eine Nullstelle für die gestörte Funktion $\tilde{f}$, d.h.

$$\tilde{f}(\tilde{x}^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad |f(\tilde{x}^*)| \leq \epsilon.$$

- Sei m die Vielfachheit der Nullstelle x^*, d.h.

$$\begin{aligned} f(x^*) &= 0, \\ f'(x^*) &= 0, \\ &\vdots \\ f^{(m-1)}(x^*) &= 0, \\ f^{(m)}(x^*) &\neq 0. \end{aligned}$$

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich damit

$$\left| \frac{(\tilde{x}^* - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(x^*) \right| \doteq \approx |f(\tilde{x}^*)| \leq \epsilon,$$

Störung im Ergebnis

$$|\tilde{x}^* - x^*| \lesssim \epsilon^{\frac{1}{m}} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(x^*)} \right|^{\frac{1}{m}}$$

Merke:

Probleme mit mehrfachen Nullstellen sind i.A. hinsichtlich Störungen in f sehr schlecht konditioniert.

Beispiel 5.4.

Die Funktion

$$f(x) = (x-1)^3$$

hat dreifache Nullstelle $x^* = 1$.

Die Nullstelle der gestörten Funktion

$$\tilde{f}(x) = (x-1)^3 - \epsilon$$

ist

$$\tilde{x}^* = 1 + \epsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Für $\epsilon = 10^{-12}$ ergibt sich

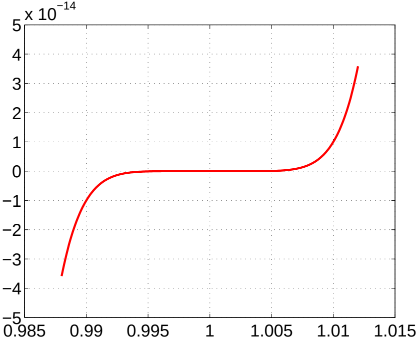
$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = 10^{-12}, \quad |x^* - \tilde{x}^*| = 10^{-4}.$$

Matlab-Demo

Beispiel: Polynom 7. Grades

Matlab Plot

```
x = 0.988:0.0001:1.012;
y = (x-1).^7;
plot(x,y)
```

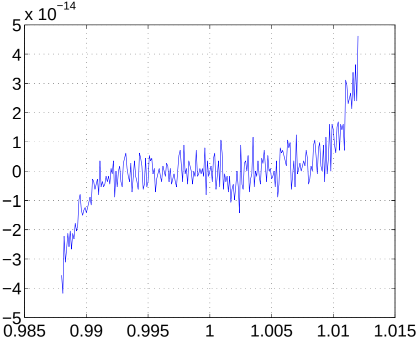


Eine mehrfache Nullstelle

Beispiel: Polynom 7. Grades

Matlab Plot

```
x = 0.988:0.0001:1.012;
y = x.^7−7∗x.^6+21∗x.^5−35∗x.^4+35∗x.^3−21∗x.^2+7∗x−1;
plot(x,y)
```



Viele Nullstellen

Matlab-Demo

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Ansatz:

- Sei $M_x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine von x abhängige Matrix, die in einer Umgebung der Nullstelle x^* invertierbar ist. Dann folgt
$$f(x^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_{x^*}\, f(x^*) = 0$$
- Erweitere die Gleichung mit x^*, d.h.

$$M_{x^*}\, f(x^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^* = x^* - M_{x^*}\, f(x^*)$$

Daraus folgt: Das Nullstellenproblem
$$f(x^*) = 0$$
ist äquivalent zum Fixpunktproblem
$$x^* = \Phi(x^*), \quad \text{mit} \quad \Phi(x) := x - M_x\, f(x).$$

Fixpunktiteration

Fixpunktiteration

- Wähle Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*
- Bilde

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Bemerkungen:

1. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Steigung von Φ an x^* entscheidet darüber, ob die Fixpunktiteration gegen x^* konvergiert/divergiert:
   - $|\Phi'(x^*)| < 1$: x^* anziehend
   - $|\Phi'(x^*)| > 1$: x^* abstoßend   Matlab-Demo
2. Durch eine geeignete Wahl von M_x (bzw. Φ) lässt sich die Konvergenz der Fixpunktiteration positiv beeinflussen.

Ein paar Definitionen

Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ein paar Definitionen

Kontraktion

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ heißt Kontraktion auf E, wenn

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in E$ mit $L < 1$.

- Φ ist genau dann eine Kontraktion, wenn sie Lipschitz-stetig mit der Konstanten $L \in [0, 1)$ ist.

Selbstabbildung

Eine Abbildung Φ ist eine Selbstabbildung auf $E \subset \mathbb{R}^n$, wenn

$$\Phi : E \to E.$$

Beispiel 5.7.

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$.
- Mögliche Fixpunktfunktionen sind

$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x+1)^{\frac{1}{6}}.$$

- Betrachte Φ_1: wir erhalten

$$|\Phi_1'(x)| = |6\,x^5| > 1 \quad \text{für } x \in [1, 2],$$

d.h. Φ_1 ist nicht als Fixpunktfunktion geeignet.
- Betrachte Φ_2: wir erhalten

$$|\Phi_2'(x)| = \left|\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{5}{6}}\right| \leq \frac{1}{6} \quad \text{für } x \in [1, 2],$$

Beispiel 5.7.

und damit

$$\begin{aligned} |\Phi_2(x) - \Phi_2(y)| &= |\Phi_2'(\xi)(x-y)| \\ &\leq \frac{1}{6}\,|x-y| \quad \text{für } x, y \in [1,2]. \end{aligned}$$

- Die Funktion Φ_2 ist eine Selbstabbildung auf $[1,2]$, d.h. $\Phi_2 : [1,2] \to [1,2]$.
- Ergebnisse

k	$x_0 = 1.2$ $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$	$x_0 = 1.135$ $x_{k+1} = \Phi_1(x_k)$
0	1.20000000	1.14e+000
1	1.14043476	1.14e+000
2	1.13522949	1.17e+000
3	1.13476890	1.57e+000
4	1.13472810	1.38e+001
5	1.13472448	6.91e+006
6	1.13472416	1.09e+041
7	1.13472414	1.66e+246

Matlab-Demo

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

Dann gilt:

1. Es existiert genau ein Fixpunkt x^* von Φ in E.
2. Für beliebiges $x_0 \in E$ konvergiert

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*.

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

3. A-priori-Fehlerabschätzung:
$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$
4. A-posteriori-Fehlerabschätzung:
$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Fragen/Probleme:

- Unter welchen Bedingungen konvergiert iteratives Verfahren?

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz liefert hinreichende Bedingungen, damit

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ k = 0, 1, \ldots$$

gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Fragen/Probleme:

- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

$\Rightarrow$ Wir möchten eine gewünschte Genauigkeit ϵ erreichen, so dass

$$\|x_k - x^*\| \leq \epsilon.$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Frage

- Wie viele Iterationen müssen wir durchführen?

$\Rightarrow$ Mit Hilfe der a-priori-Fehlerabschätzung erhalten wir

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| < \epsilon.$$

und damit ist die maximal benötigte Anzahl an Iterationen

$$k \geq \log\left(\epsilon\,(1-L)/\|x_1 - x_0\|\right)/\log(L).$$

Beachte

Wegen

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq L^{k-1} \|x_1 - x_0\|$$

ist die Schranke in der a-posteriori-Fehlerabschätzung immer besser (d.h. kleiner) als die in der a-priori-Fehlerabschätzung.

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.10.

Sei $X = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$ und Φ auf E stetig differenzierbar.
Es gelte

$$\Phi : [a, b] \to [a, b] \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und

$$\max_{x \in [a,b]} \left|\Phi'(x)\right| =: L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt für $\|\cdot\| = |\cdot|$

Beachte

Nach Mittelwertsatz gilt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)\,(x - y)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} |\Phi'(\xi)|\,|x - y|,$$

d.h. Φ ist eine Kontraktion.

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.11.

Sei $E \subseteq X = \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, und $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : E \to E \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und bzgl. einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gelte für die zugehörige Matrixnorm

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| = L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt.

Hierbei ist

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_n(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_n(x) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von Φ an der Stelle x.

Beispiel 5.13.

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞-Norm.

- Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{3} y \\ \frac{1}{8} xy^2 + \frac{1}{8}\sin x \end{pmatrix}$$

- Selbstabbildung:
  Für $x \in [0,1]$ gilt $0 \le \cos x \le 1$ und $0 \le \sin x \le 1$. Daher gilt

$$\Phi : E \to E.$$

Beispiel 5.13.

- Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x,y)\|_\infty &= \max\left\{\frac{1}{6}|\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8}\left(\left|y^2+\cos x\right| + 2|xy|\right)\right\} \\ &\le \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.11. existiert genau eine Lösung in E.

- Fehlerschätzung: Mit $\epsilon = 10^{-3}$ und $L = \frac{1}{2}$ benötigt man maximal

$$k \ge \log\left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{\|x_1 - x_0\|}\right) \Big/ \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Schritte.

Beispiel 5.13.

Für den Startwert

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

erhält man als 1. Iterierte

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

und damit

$$k \geq \log\left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{1/6}\right) \Big/ \log\left(\frac{1}{2}\right) = 8.38,$$

d.h. es werden maximal 9 Iterationen benötigt.

Ergebnisse:

- Siehe folgende Tabelle.
- In der dritten Spalte werden die Resultate der a-posteriori- Fehlerabschätzung gezeigt.

Beispiel 5.13.

k	$(x_0, y_0) = (0,0)$, $(x_k, y_k) = \Phi(x_{k-1}, y_{k-1})$	$\frac{0.5}{1-0.5} * \lVert (x_k, y_k)^T - (x_{k-1}, y_{k-1})^T \rVert_\infty$
0	(0.00000000, 0.00000000)	–
1	(0.16666667, 0.00000000)	1.67e−01
2	(0.16435721, 0.02073702)	2.07e−02
3	(0.17133296, 0.02046111)	6.98e−03
4	(0.17104677, 0.02132096)	8.60e−04
5	(0.17134151, 0.02128646)	2.95e−04
6	(0.17132164, 0.02132275)	3.63e−05
7	(0.17133430, 0.02132034)	1.27e−05
8	(0.17133314, 0.02132189)	1.56e−06
9	(0.17133369, 0.02132175)	5.52e−07

Aus der a-posteriori-Fehlerabschätzung ergibt sich, dass schon für $\boldsymbol{k = 4}$ (statt $\boldsymbol{k = 9}$) die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Zusammenfassung

- Nullstellenproblem $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$.
  Es gibt viele Möglichkeiten für Φ.

- Fixpunktiteration:

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

- Banachscher Fixpunktsatz:

$$\Phi : E \to E \qquad \text{(Selbstabbildung)}$$

$$\Phi \text{ Kontraktion auf } E$$

  hinreichende Bedingung für Konvergenz der Fixpunktiteration.

- $n = 1$ (skalares Problem): geometrische Darstellung der Fixpunktiteration.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.

f Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in $\mathbb{R}$.

w Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf $E = [-1, 0]$ erfüllt.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf $E = [0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. 0.5