Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Nichtlineare Gleichungssysteme II

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 5.4-5.6

- Banachscher Fixpunktsatz
- Konvergenz und Fehlerschätzung
- Methoden für skalare Gleichungen
- Das Newton-Verfahren für Systeme

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie wendet man den Banachschen Fixpunktsatz an
- Wie kann man bei einem iterativen Verfahren die Fehler schätzen
- Spezielle Methoden für skalare Gleichungen
- Wie funktioniert das allgemeine Newton-Verfahren

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.11.

Sei $E \subseteq X = \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, und $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : E \to E \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und bzgl. einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gelte für die zugehörige Matrixnorm

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| = L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt.

Hierbei ist

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_n(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_n(x) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von Φ an der Stelle x.

Beispiel 5.13.

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞-Norm.

- Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{8}xy^2 + \frac{1}{8}\sin x \end{pmatrix}$$

- Selbstabbildung:
  Für $x \in [0,1]$ gilt $0 \le \cos x \le 1$ und $0 \le \sin x \le 1$. Daher gilt

$$\Phi : E \to E.$$

Beispiel 5.13.

- Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x,y)\|_\infty &= \max\left\{\frac{1}{6}|\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8}\left(\left|y^2+\cos x\right| + 2|xy|\right)\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.11. existiert genau eine Lösung in E.

- Fehlerschätzung: Mit $\epsilon = 10^{-3}$ und $L = \frac{1}{2}$ benötigt man maximal

$$k \geq \log\left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{\|x_1 - x_0\|}\right) \Big/ \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Schritte.

Beispiel 5.13.

Für den Startwert

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

erhält man als 1. Iterierte

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

und damit

$$k \geq \log\left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{1/6}\right) \Big/ \log\left(\frac{1}{2}\right) = 8.38,$$

d.h. es werden maximal 9 Iterationen benötigt.

Ergebnisse:

- Siehe folgende Tabelle.
- In der dritten Spalte werden die Resultate der a-posteriori- Fehlerabschätzung gezeigt.

Beispiel 5.13.

k	$(x_0, y_0) = (0,0)$, $(x_k, y_k) = \Phi(x_{k-1}, y_{k-1})$	$\frac{0.5}{1-0.5} * \|(x_k, y_k)^T - (x_{k-1}, y_{k-1})^T\|_\infty$
0	(0.00000000, 0.00000000)	–
1	(0.16666667, 0.00000000)	1.67e−01
2	(0.16435721, 0.02073702)	2.07e−02
3	(0.17133296, 0.02046111)	6.98e−03
4	(0.17104677, 0.02132096)	8.60e−04
5	(0.17134151, 0.02128646)	2.95e−04
6	(0.17132164, 0.02132275)	3.63e−05
7	(0.17133430, 0.02132034)	1.27e−05
8	(0.17133314, 0.02132189)	1.56e−06
9	(0.17133369, 0.02132175)	5.52e−07

Aus der a-posteriori-Fehlerabschätzung ergibt sich, dass schon für $\boldsymbol{k = 4}$ (statt $\boldsymbol{k = 9}$) die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.

f — Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in $\mathbb{R}$.

w — Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf $E = [-1, 0]$ erfüllt.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf $E = [0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. 0.5

Konvergenzordnung und Fehlerschätzung

Ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge ist der Begriff der Konvergenzordnung.

Definition 5.14.

Eine konvergente Folge

$$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$$

mit Grenzwert x^* hat die Konvergenzordnung p,
falls für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\,\|x_k - x^*\|^p \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

wobei

$$0 < c < 1 \quad \text{falls} \quad p = 1.$$

Konvergenzordnung und Fehlerschätzung

Die Konvergenzordnung eines iterativen Verfahrens kann man entsprechend festlegen

Definition

Ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von $x^* \in \mathbb{R}^n$ *(z.B. die Nullstelle einer Funktion)* hat die

Konvergenzordnung p,

wenn es eine Umgebung U von x^* gibt, so dass für alle Startwerte

$$x_0 \in U \setminus \{x^*\}$$

die von dem Verfahren erzeugte Folge gegen x^* konvergiert und sie die Konvergenzordnung p hat.

Beispiel 5.15.

Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit zwischen

1. Verfahren der Ordnung $p = 1$ (lineare Konvergenz), und
2. Verfahren der Ordnung $p = 2$ (quadratische Konvergenz).

Sei $\|x_0 - x^*\| = 0.2$ und $e_k := \|x_k - x^*\|$, dann ergibt sich

1. Linear: $p = 1$ und $c = \frac{1}{2}$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125

2. Quadratisch: $p = 2$ und $c = 3$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.12	0.0432	0.0056	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-15}$

Bemerkungen 5.16.

Sei
$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
eine konvergente Fixpunktiteration mit Fixpunkt x^*.
Mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung erhält man

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= \Phi(x_k) - \Phi(x^*) \\ &= \Phi'(x^*)\,(x_k - x^*) + \mathcal{O}\big(\|x_k - x^*\|^2\big). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Konvergenzordnung:

- wenn $0 < \|\Phi'(x^*)\| < 1$: Lineare Konvergenz ($p = 1$).
- wenn $\Phi'(x^*) = 0$: Quadratische Konvergenz ($p = 2$).

Für die meisten in der Praxis benutzten Methoden zur Nullstellenbestimmung gilt $p = 1$ oder $p = 2$ (also lineare oder quadratische Konvergenz).

Fehlerschätzung für skalare Folgen

Es gelte $e_k := x^* - x_k$ und $A_k := \dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$

Lemma 5.17.

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x^*.

Aus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = A \in (-1,1), \quad A \neq 0,$$

folgt, dass die Konvergenzordnung der Folge genau 1 ist und

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{A_k}{1-A_k}(x_k - x_{k-1})}{e_k} = 1.$$

Wenn die Folge die Konvergenzordnung $p > 1$ hat, gilt

$$\lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k)/e_k = 1.$$

Fehlerschätzung für skalare Folgen

Es ergeben sich einfache a-posteriori-Fehlerschätzungen (für k hinreichend groß) aus den Resultaten in Lemma 5.17.:

$$p = 1 \;:\; x^* - x_k \approx \frac{A_k}{1 - A_k}(x_k - x_{k-1}),$$

wobei $A_k = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$ etwa konstant sein sollte.

$$p > 1 \;:\; x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k.$$

Beachte:

Für $p = 1$ (lineare Konvergenz) ist

$$|x_k - x_{k-1}| \quad \text{oder} \quad |x_{k+1} - x_k|$$

meist keine sinnvolle Schätzung der Größe des Fehlers $|x^* - x_k|$.

Beispiel 5.18.

Für die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi_2(x_k) = (x+1)^{\frac{1}{6}}$$

aus Beispiel 5.7. sind einige Resultate in Tabelle 5.3. zusammengestellt:

k	$x_0 = 0.5, x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$	$A_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$	$\frac{A_k}{1-A_k}(x_k - x_{k-1})$	$x^* - x_k$
0	0.500000000000	–	–	6.35e−01
1	1.069913193934	–	–	6.48e−02
2	1.128908359044	0.1035161	6.81e−03	5.82e−03
3	1.134208317737	0.0898372	5.23e−04	5.16e−04
4	1.134678435924	0.0887022	4.58e−05	4.57e−05
5	1.134720089466	0.0886023	4.05e−06	4.05e−06
6	1.134723779696	0.0885934	3.59e−07	3.59e−07
7	1.134724106623	0.0885926	3.18e−08	3.18e−08
8	1.134724135586	0.0885926	2.82e−09	2.82e−09
9	1.134724138152	0.0885926	2.49e−10	2.49e−10
10	1.134724138379	0.0885925	2.21e−11	2.21e−11

Fehlerschätzung für Vektorfolgen

Lemma 5.19.

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^n$ mit Grenzwert x^* und Konvergenzordnung $p > 1$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|e_k\|} = 1.$$

Aus diesem Resultat ergibt sich folgende Fehlerschätzung:

$$p > 1 : \|x_k - x^*\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|, \quad \text{für } k \text{ genügend groß.}$$

Es sei bemerkt, dass im skalaren Fall der Fehler e_k und im vektoriellen Fall die Größe des Fehlers, $\|e_k\|$, geschätzt wird.

Methode für skalare Gleichungen: Bisektion

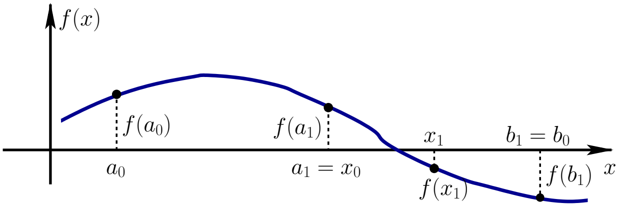
Algorithmus 5.20.

Gegeben $a_0 < b_0$ mit $f(a_0)\,f(b_0) < 0$.

Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ berechne:

- $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ und $f(x_k)$
- Setze

$$\begin{array}{lll} a_{k+1} = a_k, & b_{k+1} = x_k & \text{falls } f(x_k)\,f(a_k) \leq 0 \\ a_{k+1} = x_k, & b_{k+1} = b_k & \text{sonst.} \end{array}$$



Beispiel 5.21.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1,2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Bisektion (vgl. Beispiel 5.7.).

Die Bisektion mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $b_0 = 2$ liefert:

k	a_k	b_k	x_k	$b_k - a_k$	$f(x_k)$
0	1.00000	2.00000	1.50000	1.00000	8.89062
1	1.00000	1.50000	1.25000	0.50000	1.56470
2	1.00000	1.25000	1.12500	0.25000	−0.09771
3	1.12500	1.25000	1.18750	0.12500	0.61665
4	1.12500	1.18750	1.15625	0.06250	0.23327
5	1.12500	1.15625	1.14062	0.03125	0.06158
6	1.12500	1.14062	1.13281	0.01562	−0.01958
7	1.13281	1.14062	1.13672	0.00781	0.02062
8	1.13281	1.13672	1.13477	0.00391	0.00043
9	1.13281	1.13477	1.13379	0.00195	−0.00960

Methode für skalare Gleichungen: Newton-Verfahren

Ziel: Konstruiere Φ so, dass die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ möglichst schnell konvergiert.

Ansatz:

- Setze $\Phi(x) = x - M_x f(x)$, wobei hier $M_x = g(x)$ (skalar).
- Wähle $g(x)$ so, dass $\Phi'(x^*) = 0$.

Es gilt: $$\Phi'(x^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)},$$

und daraus folgt $$\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newton-Verfahren

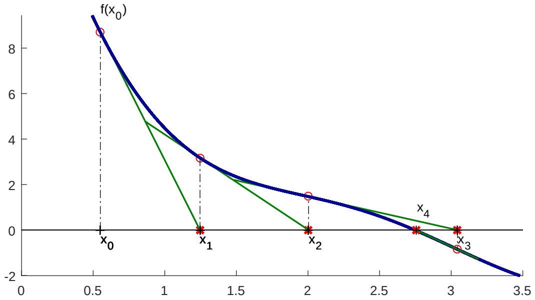
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Geometrische Herleitung des Newton-Verfahrens

Es gilt $f(x) = \underbrace{f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)}_{=:\,T(x)} + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 f''(\xi_k)$

$T(x)$ entspricht der Tangente von f bei x_k. So gilt dann

$$T(x_{k+1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$



Konvergenz Newton-Verfahren

Satz 5.22.

Sei f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung $U = (a, b)$ von x^*, und es gelte

$$f(x^*) = 0$$
$$f'(x^*) \neq 0$$

Für $x_k \in U$ und

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

gilt

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^2, \quad \xi_k \in U.$$

Also ist das Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergent.

Beispiel 5.23.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Newton-Verfahrens (vgl. Beispiel 5.7. & 5.21.).

Die Newton-Iteration $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^6 - x_k - 1}{6\,x_k^5 - 1}$ liefert:

k	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 2$	$x_{k+1} - x_k$
0	0.50000000000000	2.00000000000000	−3.19e−01
1	−1.32692307692308	1.68062827225131	−2.50e−01
2	−1.10165080870249	1.43073898823906	−1.76e−01
3	−0.92567640260338	1.25497095610944	−9.34e−02
4	−0.81641531662254	1.16153843277331	−2.52e−02
5	−0.78098515830640	1.13635327417051	−1.62e−03
6	−0.77810656986872	1.13473052834363	−6.39e−06
7	−0.77808959926268	1.13472413850022	−9.87e−11
8	−0.77808959867860	1.13472413840152	0.00e+00
9	−0.77808959867860	1.13472413840152	−

Beispiel 5.24.

Man berechne $\sqrt{a}$ für ein $a > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Ansatz: Die Wurzel von a, $\sqrt{a}$, ist Lösung von

$$f(x) := x^2 - a = 0.$$

Das Newton-Verfahren ergibt hier $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + a/x_k)$ und liefert für $a = 2$ die Resultate:

k	x_k	$x_{k+1} - x_k$	$\sqrt{2} - x_k$
0	100.00000000000000	−5.00e+01	−9.86e+01
1	50.01000000000000	−2.50e+01	−4.86e+01
2	25.02499600079984	−1.25e+01	−2.36e+01
3	12.55245804674590	−6.20e+00	−1.11e+01
4	6.35589469493114	−3.02e+00	−4.94e+00
5	3.33528160928043	−1.37e+00	−1.92e+00
6	1.96746556223115	−4.75e−01	−5.53e−01
7	1.49200088968972	−7.58e−02	−7.78e−02
8	1.41624133202894	−2.03e−03	−2.03e−03
9	1.41421501405005	−1.45e−06	−1.45e−06
10	1.41421356237384	–	−7.45e−13

Newton-Verfahren Demos

Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens:

Matlab-Demo

- Im Allgemeinen nur lokale Konvergenz
- Manchmal globale Konvergenz
- Lokale quadratische Konvergenz
- Endlose Iteration möglich
- Divergenz kann auftreten

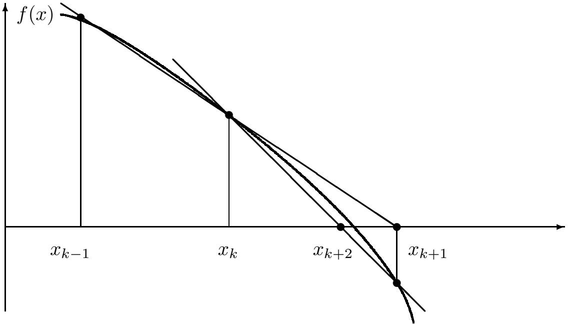
Merke:

- Quadratische Konvergenz nur lokal
- Guter Startwert ist wichtig

Methode für skalare Gleichungen: Sekanten-Verfahren

Idee:

- Ersetzen der Tangente $T(x)$ im Newton-Verfahren durch eine Sekante
- Nullstelle der Sekante ergibt neue Annäherung



Sekanten-Verfahren

Sekanten-Verfahren

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}\,f(x_k) - x_k\,f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = x_k - f(x_k)\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right)$$

Vorteile gegenüber Newton-Verfahren

- Berechnung der Ableitung $f'(x)$ wird vermieden.
- Effizienter, wenn Auswertung von $f'(x)$ und $f(x)$ etwa gleich teuer.

Nachteile gegenüber Newton-Verfahren

- Konvergenzordnung lokal $p \approx 1.6$.
- Verfahren benötigt zwei Startwerte.

Beispiel 5.26.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Sekanten-Verfahren (vgl. Beispiel 5.7., 5.21. & 5.23.).

Das Sekanten-Verfahren mit den Startwerten $x_0 = 2$ und $x_1 = 1$ liefert:

k	x_k	$x_{k+1} - x_k$
0	2.00000000000000	−1.00e+00
1	1.00000000000000	1.61e−02
2	1.01612903225806	1.74e−01
3	1.19057776867664	−7.29e−02
4	1.11765583094155	1.49e−02
5	1.13253155021613	2.29e−03
6	1.13481680800485	−9.32e−05
7	1.13472364594870	4.92e−07
8	1.13472413829122	1.10e−10
9	1.13472413840152	–

Zusammenfassung

- Konvergenzordnung: Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit

- Fehlerschätzung hängt von p (Konvergenzordnung) ab.
  Skalare Folgen : einfache Formeln $p = 1$, $p > 1$
  Vektorfolgen : einfache Formel nur für $p > 1$.

- Methoden für skalare Probleme: Bisektion,
  Newton-Verfahren,
  Sekanten-Verfahren

- Newton-Verfahren: lokale Konvergenz,
  $p = 2$,
  einfache Fehlerschätzung
  auch für Systeme anwendbar