

Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Nichtlineare Gleichungssysteme II

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen:

Dahmen & Reusken Kap 5.4-5.6

- ▶ Banachscher Fixpunktsatz
- ▶ Konvergenz und Fehlerschätzung
- ▶ Methoden für skalare Gleichungen
- ▶ Das Newton-Verfahren für Systeme

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie wendet man den Banachschen Fixpunktsatz an
- ▶ Wie kann man bei einem iterativen Verfahren die Fehler schätzen
- ▶ Spezielle Methoden für skalare Gleichungen
- ▶ Wie funktioniert das allgemeine Newton-Verfahren

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.11.

Sei $E \subseteq X = \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, und $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : E \rightarrow E \quad (\text{Selbstabbildung}),$$

und bzgl. einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n gelte für die zugehörige Matrixnorm

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| = L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt.

Hierbei ist

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_n(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi_n(x) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von Φ an der Stelle x .

Beispiel 5.13.

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned}6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x\end{aligned}$$

auf $E = [0, 1] \times [0, 1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞ -Norm.

► Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{3} y \\ \frac{1}{8} xy^2 + \frac{1}{8} \sin x \end{pmatrix}$$

► Selbstabbildung:

Für $x \in [0, 1]$ gilt $0 \leq \cos x \leq 1$ und $0 \leq \sin x \leq 1$. Daher gilt

$$\Phi : E \rightarrow E.$$

Beispiel 5.13.

- ▶ Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{8} \cos x & \frac{1}{4} xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞ -Norm auf \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x, y)\|_{\infty} &= \max \left\{ \frac{1}{6} |\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8} (|y^2 + \cos x| + 2|xy|) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.11. existiert genau eine Lösung in E .

- ▶ Fehlerschätzung: Mit $\epsilon = 10^{-3}$ und $L = \frac{1}{2}$ benötigt man maximal

$$k \geq \log \left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{\|x_1 - x_0\|} \right) / \log \left(\frac{1}{2} \right)$$

Schritte.

Beispiel 5.13.

Für den Startwert

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

erhält man als 1. Iterierte

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

und damit

$$k \geq \log \left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{1/6} \right) / \log \left(\frac{1}{2} \right) = 8.38,$$

d.h. es werden maximal 9 Iterationen benötigt.

Ergebnisse:

- ▶ Siehe folgende Tabelle.
- ▶ In der dritten Spalte werden die Resultate der a-posteriori- Fehlerabschätzung gezeigt.

Beispiel 5.13.

k	$(x_0, y_0) = (0, 0),$ $(x_k, y_k) = \Phi(x_{k-1}, y_{k-1})$	$\frac{0.5}{1-0.5}^*$ $\ (x_k, y_k)^T - (x_{k-1}, y_{k-1})^T\ _\infty$
0	(0.00000000, 0.00000000)	—
1	(0.16666667, 0.00000000)	1.67e-01
2	(0.16435721, 0.02073702)	2.07e-02
3	(0.17133296, 0.02046111)	6.98e-03
4	(0.17104677, 0.02132096)	8.60e-04
5	(0.17134151, 0.02128646)	2.95e-04
6	(0.17132164, 0.02132275)	3.63e-05
7	(0.17133430, 0.02132034)	1.27e-05
8	(0.17133314, 0.02132189)	1.56e-06
9	(0.17133369, 0.02132175)	5.52e-07

Aus der a-posteriori-Fehlerabschätzung ergibt sich, dass schon für $k = 4$ (statt $k = 9$) die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x .

f Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in \mathbb{R} .

w Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf $E = [-1, 0]$ erfüllt.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf $E = [0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an.

Konvergenzordnung und Fehlerschätzung

Ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge ist der Begriff der *Konvergenzordnung*.

Definition 5.14.

Eine konvergente Folge

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$$

mit Grenzwert x^* hat die Konvergenzordnung p , falls für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^p \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

wobei

$$0 < c < 1 \quad \text{falls } p = 1.$$

Konvergenzordnung und Fehlerschätzung

Die Konvergenzordnung eines iterativen Verfahrens kann man entsprechend festlegen

Definition

Ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von $x^* \in \mathbb{R}^n$ (z.B. die Nullstelle einer Funktion) hat die

Konvergenzordnung p ,

wenn es eine Umgebung U von x^* gibt, so dass für alle Startwerte

$$x_0 \in U \setminus \{x^*\}$$

die von dem Verfahren erzeugte Folge gegen x^* konvergiert und sie die Konvergenzordnung p hat.

Beispiel 5.15.

Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit zwischen

1. Verfahren der Ordnung $p = 1$ (lineare Konvergenz), und
2. Verfahren der Ordnung $p = 2$ (quadratische Konvergenz).

Sei $\|x_0 - x^*\| = 0.2$ und $e_k := \|x_k - x^*\|$, dann ergibt sich

1. Linear: $p = 1$ und $c = \frac{1}{2}$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125

2. Quadratisch: $p = 2$ und $c = 3$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.12	0.0432	0.0056	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-15}$

Bemerkungen 5.16.

Sei $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k)$, $k = 0, 1, \dots$,

eine konvergente Fixpunktiteration mit Fixpunkt \mathbf{x}^* .

Mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^* &= \Phi(\mathbf{x}_k) - \Phi(\mathbf{x}^*) \\ &= \Phi'(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2).\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Konvergenzordnung:

- ▶ wenn $0 < \|\Phi'(\mathbf{x}^*)\| < 1$: Lineare Konvergenz ($p = 1$).
- ▶ wenn $\Phi'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$: Quadratische Konvergenz ($p = 2$).

Für die meisten in der Praxis benutzten Methoden zur Nullstellenbestimmung gilt $p = 1$ oder $p = 2$ (also lineare oder quadratische Konvergenz).

Fehlerschätzung für skalare Folgen

Es gelte $e_k := x^* - x_k$ und $A_k := \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$

Lemma 5.17.

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x^* .

Aus
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = A \in (-1, 1), \quad A \neq 0,$$

folgt, dass die Konvergenzordnung der Folge genau 1 ist und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{1 - A_k} (x_k - x_{k-1}) = 1.$$

Wenn die Folge die Konvergenzordnung $p > 1$ hat, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{k+1} - x_k) / e_k = 1.$$

Fehlerschätzung für skalare Folgen

Es ergeben sich einfache a-posteriori-Fehlerschätzungen (für k hinreichend groß) aus den Resultaten in Lemma 5.17.:

$$p = 1 : x^* - x_k \approx \frac{A_k}{1 - A_k} (x_k - x_{k-1}),$$

wobei $A_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$ etwa konstant sein sollte.

$$p > 1 : x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k.$$

Beachte:

Für $p = 1$ (lineare Konvergenz) ist

$$|x_k - x_{k-1}| \quad \text{oder} \quad |x_{k+1} - x_k|$$

meist keine sinnvolle Schätzung der Größe des Fehlers $|x^* - x_k|$.

Beispiel 5.18.

Für die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi_2(x_k) = (x + 1)^{\frac{1}{6}}$$

aus Beispiel 5.7. sind einige Resultate in Tabelle 5.3.
zusammengestellt:

k	$x_0 = 0.5, x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$	$A_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$	$\frac{A_k}{1 - A_k}(x_k - x_{k-1})$	$x^* - x_k$
0	0.50000000000000	–	–	6.35e-01
1	1.069913193934	–	–	6.48e-02
2	1.128908359044	0.1035161	6.81e-03	5.82e-03
3	1.134208317737	0.0898372	5.23e-04	5.16e-04
4	1.134678435924	0.0887022	4.58e-05	4.57e-05
5	1.134720089466	0.0886023	4.05e-06	4.05e-06
6	1.134723779696	0.0885934	3.59e-07	3.59e-07
7	1.134724106623	0.0885926	3.18e-08	3.18e-08
8	1.134724135586	0.0885926	2.82e-09	2.82e-09
9	1.134724138152	0.0885926	2.49e-10	2.49e-10
10	1.134724138379	0.0885925	2.21e-11	2.21e-11

Fehlerschätzung für Vektorfolgen

Lemma 5.19.

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R}^n mit Grenzwert x^* und Konvergenzordnung $p > 1$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|e_k\|} = 1.$$

Aus diesem Resultat ergibt sich folgende Fehlerschätzung:

$$p > 1 : \|x_k - x^*\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|, \quad \text{für } k \text{ genügend groß.}$$

Es sei bemerkt, dass im skalaren Fall der Fehler e_k und im vektoriellen Fall die Größe des Fehlers, $\|e_k\|$, geschätzt wird.

Methode für skalare Gleichungen: Bisektion

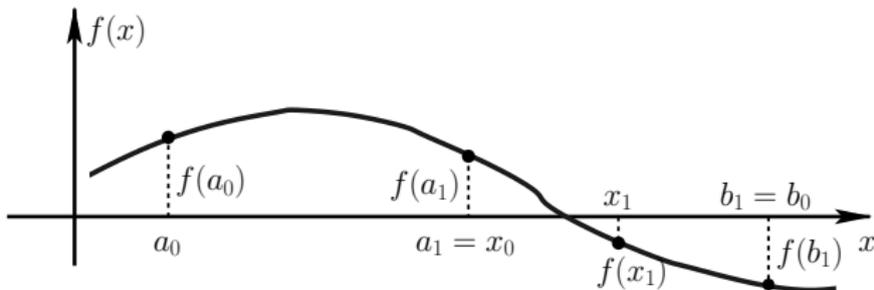
Algorithmus 5.20.

Gegeben $a_0 < b_0$ mit $f(a_0) f(b_0) < 0$.

Für $k = 0, 1, 2, \dots$ berechne:

- ▶ $x_k = \frac{1}{2} (a_k + b_k)$ und $f(x_k)$
- ▶ Setze

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k, & b_{k+1} &= x_k & \text{falls } f(x_k) f(a_k) &\leq 0 \\ a_{k+1} &= x_k, & b_{k+1} &= b_k & \text{sonst.} \end{aligned}$$



Beispiel 5.21.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Bisektion (vgl. Beispiel 5.7.).

Die Bisektion mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $b_0 = 2$ liefert:

k	a_k	b_k	x_k	$b_k - a_k$	$f(x_k)$
0	1.00000	2.00000	1.50000	1.00000	8.89062
1	1.00000	1.50000	1.25000	0.50000	1.56470
2	1.00000	1.25000	1.12500	0.25000	-0.09771
3	1.12500	1.25000	1.18750	0.12500	0.61665
4	1.12500	1.18750	1.15625	0.06250	0.23327
5	1.12500	1.15625	1.14062	0.03125	0.06158
6	1.12500	1.14062	1.13281	0.01562	-0.01958
7	1.13281	1.14062	1.13672	0.00781	0.02062
8	1.13281	1.13672	1.13477	0.00391	0.00043
9	1.13281	1.13477	1.13379	0.00195	-0.00960

Methode für skalare Gleichungen: Newton-Verfahren

Ziel: Konstruiere Φ so, dass die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ möglichst schnell konvergiert.

Ansatz:

- ▶ Setze $\Phi(x) = x - M_x f(x)$, wobei hier $M_x = g(x)$ (skalar).
- ▶ Wähle $g(x)$ so, dass $\Phi'(x^*) = 0$.

Es gilt: $\Phi'(x^*) = 0 \iff g(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$,

und daraus folgt $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Newton-Verfahren

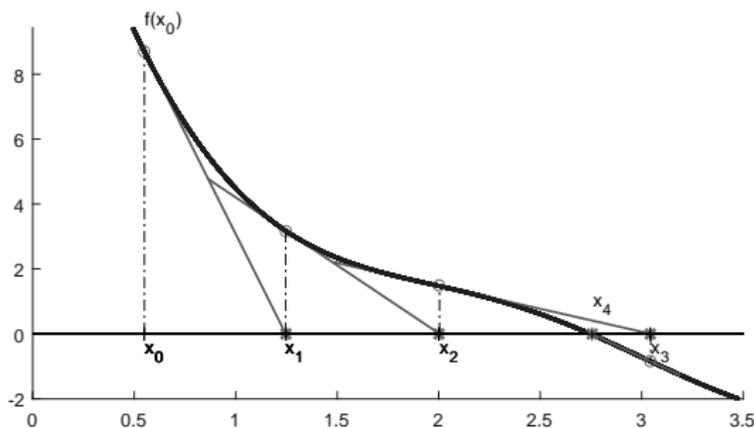
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Geometrische Herleitung des Newton-Verfahrens

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } f(x) &= \underbrace{f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)}_{=: T(x)} + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 f''(\xi_k) \end{aligned}$$

$T(x)$ entspricht der Tangente von f bei x_k . So gilt dann

$$T(x_{k+1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$



Konvergenz Newton-Verfahren

Satz 5.22.

Sei f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung $U = (a, b)$ von x^* , und es gelte

$$\begin{aligned}f(x^*) &= 0 \\f'(x^*) &\neq 0\end{aligned}$$

Für $x_k \in U$ und

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

gilt

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2, \quad \xi_k \in U.$$

Also ist das Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergent.

Beispiel 5.23.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Newton-Verfahrens (vgl. Beispiel 5.7. & 5.21.).

Die Newton-Iteration $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^6 - x_k - 1}{6x_k^5 - 1}$ liefert:

k	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 2$	$x_{k+1} - x_k$
0	0.5000000000000000	2.0000000000000000	-3.19e-01
1	-1.32692307692308	1.68062827225131	-2.50e-01
2	-1.10165080870249	1.43073898823906	-1.76e-01
3	-0.92567640260338	1.25497095610944	-9.34e-02
4	-0.81641531662254	1.16153843277331	-2.52e-02
5	-0.78098515830640	1.13635327417051	-1.62e-03
6	-0.77810656986872	1.13473052834363	-6.39e-06
7	-0.77808959926268	1.13472413850022	-9.87e-11
8	-0.77808959867860	1.13472413840152	0.00e+00
9	-0.77808959867860	1.13472413840152	-

Beispiel 5.24.

Man berechne \sqrt{a} für ein $a > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Ansatz: Die Wurzel von a , \sqrt{a} , ist Lösung von

$$f(x) := x^2 - a = 0.$$

Das Newton-Verfahren ergibt hier $x_{k+1} = \frac{1}{2} (x_k + a/x_k)$ und liefert für $a = 2$ die Resultate:

k	x_k	$x_{k+1} - x_k$	$\sqrt{2} - x_k$
0	100.00000000000000	-5.00e+01	-9.86e+01
1	50.01000000000000	-2.50e+01	-4.86e+01
2	25.02499600079984	-1.25e+01	-2.36e+01
3	12.55245804674590	-6.20e+00	-1.11e+01
4	6.35589469493114	-3.02e+00	-4.94e+00
5	3.33528160928043	-1.37e+00	-1.92e+00
6	1.96746556223115	-4.75e-01	-5.53e-01
7	1.49200088968972	-7.58e-02	-7.78e-02
8	1.41624133202894	-2.03e-03	-2.03e-03
9	1.41421501405005	-1.45e-06	-1.45e-06
10	1.41421356237384	-	-7.45e-13

Newton-Verfahren Demos

Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens:

Matlab-Demo

- ▶ Im Allgemeinen nur lokale Konvergenz
- ▶ Manchmal globale Konvergenz
- ▶ Lokale quadratische Konvergenz
- ▶ Endlose Iteration möglich
- ▶ Divergenz kann auftreten

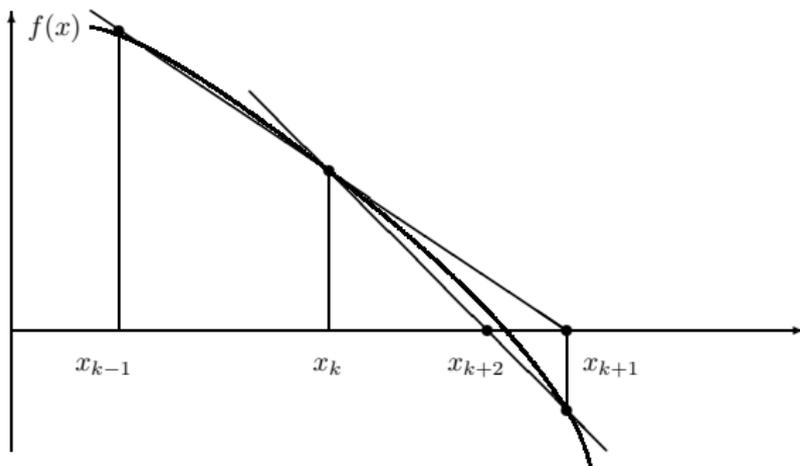
Merke:

- ▶ Quadratische Konvergenz nur lokal
- ▶ Guter Startwert ist wichtig

Methode für skalare Gleichungen: Sekanten-Verfahren

Idee:

- ▶ Ersetzen der Tangente $T(x)$ im Newton-Verfahren durch eine Sekante
- ▶ Nullstelle der Sekante ergibt neue Annäherung



Sekanten-Verfahren

Sekanten-Verfahren

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ &= x_k - f(x_k) \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right)\end{aligned}$$

Vorteile gegenüber Newton-Verfahren

- ▶ Berechnung der Ableitung $f'(x)$ wird vermieden.
- ▶ Effizienter, wenn Auswertung von $f'(x)$ und $f(x)$ etwa gleich teuer.

Nachteile gegenüber Newton-Verfahren

- ▶ Konvergenzordnung lokal $p \approx 1.6$.
- ▶ Verfahren benötigt zwei Startwerte.

Beispiel 5.26.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Sekanten-Verfahren (vgl. Beispiel 5.7., 5.21. & 5.23.).

Das Sekanten-Verfahren mit den Startwerten $x_0 = 2$ und $x_1 = 1$ liefert:

k	x_k	$x_{k+1} - x_k$
0	2.0000000000000000	-1.00e+00
1	1.0000000000000000	1.61e-02
2	1.01612903225806	1.74e-01
3	1.19057776867664	-7.29e-02
4	1.11765583094155	1.49e-02
5	1.13253155021613	2.29e-03
6	1.13481680800485	-9.32e-05
7	1.13472364594870	4.92e-07
8	1.13472413829122	1.10e-10
9	1.13472413840152	-

Zusammenfassung

- ▶ Konvergenzordnung: Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit
- ▶ Fehlerschätzung hängt von p (Konvergenzordnung) ab.
 - Skalare Folgen : einfache Formeln $p = 1, p > 1$
 - Vektorfolgen : einfache Formel nur für $p > 1$.
- ▶ Methoden für skalare Probleme: Bisektion,
Newton-Verfahren,
Sekanten-Verfahren
- ▶ Newton-Verfahren: lokale Konvergenz,
 $p = 2$,
einfache Fehlerschätzung
auch für Systeme anwendbar