

Numerische Mathematik für Maschinenbauer
Nichtlineare Ausgleichsrechnung

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 6.1-6.3

- ▶ Das nichtlineare Ausgleichsproblem
- ▶ Gauß-Newton-Verfahren
- ▶ Levenberg-Marquardt-Verfahren

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie ist die Problemstellung bei einem nichtlinearen Ausgleichsproblem
- ▶ Wie funktioniert das Gauß-Newton-Verfahren
- ▶ Wie funktioniert das Levenberg-Marquardt-Verfahren
- ▶ Wichtige (Konvergenz-)Eigenschaften dieser Methoden

Satz 5.31.

Annahmen:

⋮

- ▶ Lipschitz-stetig auf Ω mit einer Konstanten γ

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad x, y \in \Omega.$$

Ein solches γ existiert, wenn f zweimal stetig differenzierbar ist.

⋮

Zur Erinnerung: Lineares Ausgleichsproblem (Beispiel 4.2.)

In der Fourieranalyse wird eine T -periodische Funktion f durch eine Linearkombination der T -periodischen trigonometrischen Polynome

$$1, \cos(ct), \sin(ct), \cos(2ct), \sin(2ct), \dots, \cos(Nct), \sin(Nct)$$

mit $c := \frac{2\pi}{T}$ in der Form

$$g_N(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \left(\alpha_k \cos(kct) + \beta_k \sin(kct) \right)$$

approximiert.

Zur Erinnerung: Lineares Ausgleichsproblem (Beispiel 4.2.)

Annahme:

Nicht f , sondern nur eine Reihe vom Meßdaten

$$b_i \approx f(t_i), \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T,$$

ist bekannt, wobei $m > 2N + 1$.

Daraus ergibt sich der

Ansatz zur Bestimmung der Koeffizienten

$$x = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_N, \beta_N)^T:$$

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{2N+1}} \sum_{i=1}^m \left(g_N(t_i) - b_i \right)^2.$$

Lineares vs. nichtlineares Ausgleichsproblem

Definition

Zu gegebenen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$, für das

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax^* - b\|_2$$

gilt. Diese Problemstellung heißt das lineare Ausgleichsproblem.

Wesentliche Eigenschaft

Die unbekanntenen Koeffizienten/Parameter tauchen linear auf
bzw.
es lassen sich entsprechende Parameter definieren/identifizieren.

Beim nichtlinearen Ausgleichsproblem ist dies nicht mehr möglich...

Beispiel 6.1.

Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung:

$$m u'' + b u' + D u = 0,$$

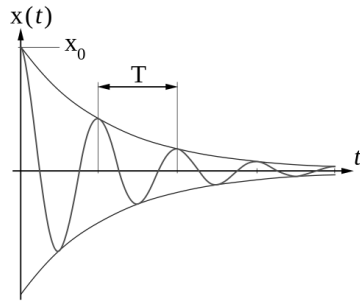
mit Masse m , Dämpfungskonstante b und Federkonstante D .

Lösungen haben die nichtlineare Form:

$$u(t) = u_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_0),$$

wobei:

- u_0 → Anfangswert
- φ_0 → Nullphasenwinkel
- δ → Abklingkonstante
- ω_d → Eigenkreisfrequenz



Quelle: wikipedia

Beispiel 6.1.

Gegeben:

- ▶ 10 Messungen an den Punkten t_1, t_2, \dots, t_{10} mit zugehörigen Daten b_1, b_2, \dots, b_{10} .
- ▶ Modell einer gedämpften Schwingung

$$y(t; x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 e^{-x_2 t} \sin(x_3 t + x_4)$$

mit Parametern x_1, \dots, x_4 .

Gesucht:

- ▶ Parameter x_1, \dots, x_4 , so dass die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{10} (x_1 e^{-x_2 t_i} \sin(x_3 t_i + x_4) - b_i)^2 = \|F(x)\|_2^2$$

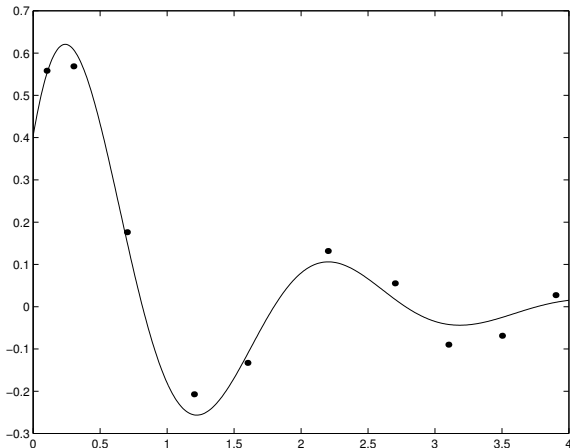
minimal wird.

Hierbei ist $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ nicht linear in x_2, x_3, x_4 definiert

$$\begin{aligned} F_i(x) &= F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_1 e^{-x_2 t_i} \sin(x_3 t_i + x_4) - b_i, \quad i = 1, \dots, 10. \end{aligned}$$

Beispiel 6.1.

Berechnete Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems:



Definition

Definiert man allgemein die Abbildung ($m > n$)

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F_i(x) := y(t_i; x) - b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

kann das nichtlineare Ausgleichsproblem wie folgt formuliert werden:

Nichtlineares Ausgleichsproblem

Bestimme $x^* \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$x^* = \arg \min_{x \in U \subseteq \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2,$$

oder, äquivalent,

$$x^* = \arg \min_{x \in U \subseteq \mathbb{R}^n} \phi(x),$$

wobei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) := \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} F(x)^T F(x).$

Definition

Zur Erinnerung:

Die Funktion $\phi(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$ hat in einem Punkt x^* ein lokales Minimum, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\nabla\phi(x^*) = \mathbf{0}$ (d.h. x^* ist kritischer Punkt von ϕ),
2. $\phi''(x^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch positiv definit.

Es läßt sich durch Nachrechnen bestätigen, dass

$$\nabla\phi(x) = F'(x)^T F(x),$$

$$\phi''(x) = F'(x)^T F'(x) + \sum_{i=1}^m F_i(x) F_i''(x),$$

mit Jacobi-Matrix $F'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

und Hesse-Matrizen $F_i''(x) := \left(\frac{\partial^2 F_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Das Gauß-Newton-Verfahren

Nichtlineares Ausgleichsproblem (lokal)

Gegeben $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, bestimme $x^* \in U \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$x^* = \arg \min_{x \in U} \|F(x)\|_2.$$

Ansatz:

1. Ersetze $F(x)$ durch lineare Approximation (Taylor-Entwicklung)
2. Schrittweise Annäherung an x^* durch Lösung linearer Probleme in jedem Schritt

Zur Erinnerung:

- ▶ Wir bezeichnen die Lösung am Iterationsschritt k mit

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T \in \mathbb{R}^n.$$

- ▶ Taylor-Entwicklung

$$F(x) = F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k) + \mathcal{O}(\|x - x^k\|_2^2).$$

Das Gauß-Newton-Verfahren

Ansatz:

Ersetze $F(x)$ in $\min_{x \in U} \|F(x)\|_2$, durch lineare Approximation

$$\min_{x \in U} \underbrace{\|F(x^k)\|_2}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{F'(x^k)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{(x - x^k)}_{\in \mathbb{R}^n} \|_2,$$

Wir setzen $s = x - x^k$ (bzw. $s^k = x^{k+1} - x^k$) und erhalten das lineare Ausgleichsproblem:

Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$s^k = \arg \min_{s \in U \subseteq \mathbb{R}^n} \|F'(x^k) s + F(x^k)\|_2$$

Anschließend berechnen wir $x^{k+1} = x^k + s^k$.

Bei $U \neq \mathbb{R}^n$ liegt ein lokales, ansonsten ein globales Problem vor.

Das Gauß-Newton-Verfahren

Algorithmus 6.3. (Gauß-Newton)

Wähle Startwert x^0 .

Für $k = 0, 1, 2, \dots$:

1. Berechne $F(x^k), F'(x^k)$.
2. Finde s^k , so dass

$$s^k = \arg \min_{s \in U \subseteq \mathbb{R}^n} \|F'(x^k) s + F(x^k)\|_2$$

3. Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.

Beachte

- ▶ Schritt 2 erfordert die Lösung eines linearen Ausgleichsproblems (Normalgleichung, QR-Zerlegung)
- ▶ Falls $F'(x)$ nicht vollen Rang hat, hat das Ausgleichsproblem keine eindeutige Lösung.

Bemerkungen

- ▶ “Analogie” nichtlineare Gleichungssysteme.
- ▶ In einem kritischen Punkt \mathbf{x}^* von ϕ muss die Ableitung

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x})^T \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

gleich Null $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ sein.

Als Abbruchkriterium für das Verfahren wird daher

$$\|\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{F}(\mathbf{x}^k)\|_2 \leq \varepsilon$$

häufig benutzt, wobei ε eine vorgegebene Toleranz ist.

- ▶ Der Erfolg des Gauß-Newton-Verfahrens hängt von der Wahl des Startwerts ab (vgl. Newton-Verfahren).
- ▶ Die Bedingung $\text{Rang}(\mathbf{F}'(\mathbf{x})) = n$ kann man weglassen, wenn der Zusatz “mit minimaler 2-Norm” aufgenommen wird.

Analyse der Gauß-Newton-Methode

Sei x^* ein kritischer Punkt von ϕ , der in einer Umgebung U eindeutig ist.

Annahme:

$$\text{Rang}(F'(x)) = n \quad \text{für alle } x \in U .$$

Für $x^k \in U$ hat das lineare Ausgleichsproblem die eindeutige Lösung

$$s^k = -[F'(x^k)^T F'(x^k)]^{-1} F'(x^k)^T F(x^k)$$

Analyse der Gauß-Newton-Methode

Deshalb gilt für die Gauß-Newton-Iteration:

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - [F'(x^k)^T F'(x^k)]^{-1} F'(x^k)^T F(x^k) \\ &= x^k - [F'(x^k)^T F'(x^k)]^{-1} \nabla \phi(x^k) \\ &= \Phi(x^k),\end{aligned}$$

mit

$$\Phi(x) := x - [F'(x)^T F'(x)]^{-1} \nabla \phi(x).$$

Es gilt:

$$x = \Phi(x) \Leftrightarrow \nabla \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*.$$

Die Gauß-Newton-Methode ist also eine Fixpunktiteration.

Beispiel 6.4.

Lösen Sie das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{x \in [0, 2\pi]} \|\mathbf{F}(x)\|_2,$$

wobei

$$\mathbf{F}(x) := \begin{pmatrix} a + r \cos(x) \\ r \sin(x) \end{pmatrix}, \text{ mit } a > r > 0.$$

- ▶ Für die Jacobi-Matrix erhält man

$$\mathbf{F}'(x) = r \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}'(x)^T \mathbf{F}'(x) = r^2.$$

- ▶ Außerdem ergibt sich

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} (a^2 + 2 a r \cos(x) + r^2)$$

und damit

$$\nabla \phi(x) = -a r \sin(x).$$

Beispiel 6.4.

- ▶ Für die Iterationsfunktion zu F erhält man schließlich

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x - (F'(x)^T F'(x))^{-1} \nabla \phi(x^k) \\ &= x + \frac{a}{r} \sin(x)\end{aligned}$$

- ▶ Es gibt zwei kritische Punkte von ϕ

$$x^* = 0 \quad (\text{lokales Maximum}),$$

$$x^* = \pi \quad (\text{lokales Minimum}).$$

- ▶ In den kritischen Punkten $x^* = 0$, $x^* = \pi$ gilt

$$|\Phi'(x^*)| = \left| 1 + \frac{a}{r} \cos(x^*) \right|.$$

und damit

$$|\Phi'(x^*)| = \frac{a+r}{r} > 1 \quad \text{für } x^* = 0 \text{ (lokales Max)}$$

$$|\Phi'(x^*)| = \frac{a-r}{r} = \frac{a}{r} - 1 \quad \text{für } x^* = \pi \text{ (lokales Min)}$$

Beispiel 6.4.

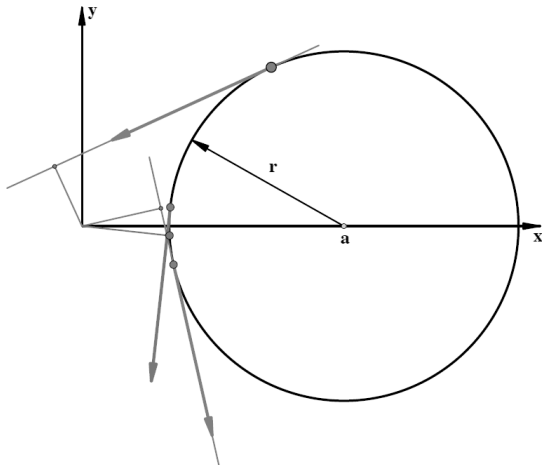
Das Gauß-Newton-Verfahren hat in diesem Beispiel folgende Eigenschaften:

1. Das lokale Maximum ist abstoßend
2. Die Methode ist linear konvergent in einer Umgebung des lokalen Minimums (wenn $a < 2r$),
Falls $a = r$ liegt sogar quadratische Konvergenz vor.
oder
3. das lokale Minimum ist auch abstoßend (wenn $a > 2r$).

Man kann zeigen, dass ähnliche Eigenschaften in einem allgemeinen Rahmen gültig sind.

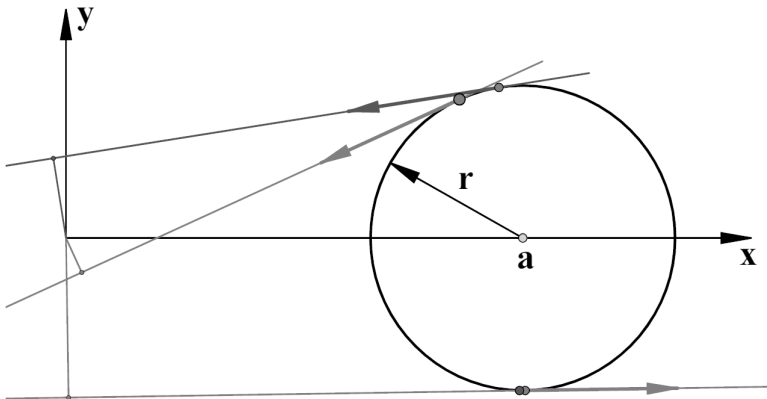
Beispiel 6.4.

Konvergenter Fall



Beispiel 6.4.

Divergender Fall



Folgerung 6.6.

Für die allgemeine Gauß-Newton-Iterationsfunktion Φ gilt

$$\|\Phi'(x^*)\|_A = \rho(K) \|F(x^*)\|_2,$$

$$\|\Phi'(x^*)\| \geq \rho(K) \|F(x^*)\|_2,$$

mit

$$K := A^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{F_i(x^*)}{\|F(x^*)\|_2} F_i''(x^*) \right) A^{-1}$$

für jede Operatornorm $\|\cdot\|$.

Hieraus kann man folgendes schließen:

Im Normalfall ist $F(x^*) \neq 0$, $K \neq 0$ und deshalb $\Phi'(x^*) \neq 0$.

Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen nicht schneller als linear.

Folgerung 6.6.

Wenn der kritische Punkt x^* ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt ist, gilt

$$\rho(K) \|F(x^*)\|_2 \geq 1$$

und deshalb

$$\|\Phi'(x^*)\| \geq 1$$

für jede Operatornorm $\|\cdot\|$.

Das Verfahren bewahrt uns also davor, einen “falschen” kritischen Punkt zu finden.

Beachte

Solche kritischen Punkte sind für das Gauß-Newton-Verfahren also abstoßend, was günstig ist, weil ein (lokales) Minimum gesucht wird.

Folgerung 6.6.

Die Größe $\rho(\mathbf{K}) \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)\|_2$ ist entscheidend für die lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens.

Für ein lokales Minimum \mathbf{x}^* der Funktion ϕ ist die lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens gesichert, falls die Bedingung

$$\rho(\mathbf{K}) \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)\|_2 < 1$$

erfüllt ist.

Sei \mathbf{x}^* ein lokales Minimum von ϕ , wofür gilt:

$$\rho(\mathbf{K}) \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)\|_2 > 1.$$

Dann ist $\|\Phi'(\mathbf{x}^*)\| > 1$ für jede Operatornorm $\|\cdot\|$.

Ein lokales Minimum von ϕ kann für die Gauß-Newton-Methode also abstoßend sein.

Beispiel 6.7.

Das Gauß-Newton-Verfahren angewandt auf das Problem der gedämpften Schwingung in Beispiel 6.1.

k	$\ F(x^k)\ _2$	$\ \nabla\phi(x^k)\ _2$	$\ \nabla\phi(x^k)\ _2/\ \nabla\phi(x^{k-1})\ _2$
0	0.35035332090089	1.45e-01	-
1	0.34106434131008	1.33e-01	0.91
2	0.22208131421995	4.88e-02	0.37
3	0.16802866234936	1.02e-01	2.08
4	0.09190056278958	1.80e-01	0.18
5	0.08902339976144	1.18e-03	0.07
6	0.08895515308450	3.81e-04	0.32
7	0.08894991006370	1.15e-04	0.30
8	0.08894937563528	4.07e-05	0.35
9	0.08894931422207	1.38e-05	0.34
10	0.08894930687791	4.85e-06	0.35
11	0.08894930599062	1.68e-06	0.35
12	0.08894930588306	5.87e-07	0.35

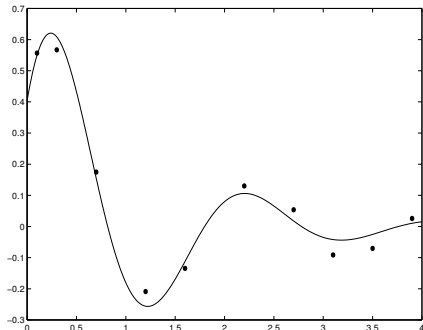
In der letzten Spalte der Tabelle sieht man das lineare Konvergenzverhalten des Gauß-Newton-Verfahrens.

Beispiel 6.7.

Die berechneten Parameterwerte x^* aus dem 12 Iterationsschritt liefern die Lösung

$$y(t; x^*) = x_1^* e^{-x_2^* t} \sin(x_3^* t + x_4^*),$$

die im folgenden Plot dargestellt ist.



Levenberg-Marquardt-Verfahren

Zur Erinnerung:

Berechnung der Korrektur (bzw. Schrittweite) beim Gauß-Newton-Verfahren

$$F'(x^k)^T F'(x^k) s^k = -F'(x^k)^T F(x^k)$$

Idee:

Einführung einer „Regularisierung“

$$\left[F'(x^k)^T F'(x^k) + \mu^2 I \right] s^k = -F'(x^k)^T F(x^k),$$

wobei $\mu > 0$ ein zu wählender Parameter ist.

Bemerkungen

Lineares Ausgleichsproblem (Gauß-Newton)

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| F'(x^k) s + F(x^k) \right\|_2$$

wird ersetzt durch

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left(\|F'(x^k) s + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \|s\|_2^2 \right),$$

oder, äquivalent,

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2.$$

Neue Annäherung: $x^{k+1} = x^k + s^k$

Großer Vorteil: Die Matrix $\begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix}$ hat immer vollen Rang.

Bemerkungen

Weitere günstige Eigenschaft

Es gilt

$$\|s^k\|_2 \leq \frac{\|F'(x^k)\|_2}{\mu},$$

d.h. μ “groß” \Rightarrow Korrektur s^k “klein”.

Die Methode erlaubt eine Dämpfungsstrategie.

- ▶ Wahl der Korrektur in der Praxis heuristisch
 - ▶ basierend auf Residuum $\|F(x^k)\|_2^2 - \|F(x^k + s^k)\|_2^2$
- ▶ Levenberg-Marquardt-Verfahren kann auch als Fixpunktiteration formuliert werden

$$\Phi_\mu(x) = x - [F'(x)^T F'(x) + \mu^2 I]^{-1} \nabla \phi(x).$$

Konvergenzordnung wie bei der Gauß-Newton-Methode.
Geeignete Wahl von μ : Einzugsbereich wird vergrößert.

Levenberg-Marquardt-Methode

Algorithmus 6.10. (Levenberg-Marquardt)

Wähle Startwert x^0 und Anfangswert für den Parameter μ .

Für $k = 0, 1, 2, \dots$:

1. Berechne $F(x^k)$, $F'(x^k)$
2. Löse das lineare Ausgleichsproblem

$$s^k = \arg \min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2.$$

3. Teste, ob die Korrektur s^k akzeptabel ist.
Wenn nein, dann
wird μ vergrößert und Schritt 2 wiederholt.
4. Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.
5. Sind bestimmte Kriterien erfüllt sind, wird μ verkleinert.

Zusammenfassung

- ▶ Beim Gauß-Newton-Verfahren wird das nichtlineare Ausgleichsproblem über eine Folge linearer Ausgleichsprobleme gelöst.
- ▶ Lokale Konvergenz im allgemeinen nur 1. Ordnung, falls $F'(x^*) = 0$, sogar von 2. Ordnung.
- ▶ Es kann lokale Divergenz auftreten.
- ▶ Matrix $F'(x^k)$ kann Rang $< n$ haben.
- ▶ Bei Levenberg-Marquardt:
 - ▶ Parameter μ zur Vergrößerung des Einzugsbereichs.
 - ▶ Matrix $\begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix}$ hat Rang $= n$.

Verständnisfragen

Es sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$.

Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem:

Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

- f** Die Gauß-Newton-Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* .
- w** Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Matrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.
- w** Die Gauß-Newton-Methode kann man als Fixpunktiteration darstellen.
- f** Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode ist in der Regel 2.

	linear	→	nichtlinear	Verfahren
Gleichung	$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$ $Ax = b$ \Leftrightarrow $f(x) = Ax - b = 0$	→	$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $f(x) = 0$	$f(x) \approx f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) \stackrel{!}{=} 0$ Newton-Verfahren: $f'(x^k) s^k = -f(x^k)$ $x^{k+1} = x^k + s^k$
↓	↓		↓	↓
Ausgleich	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ $\ Ax - b\ \rightarrow \min$ genauer $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ $	→	$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ globales/lokales Problem $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ $ $x^* = \arg \min_{x \in U} \ F(x)\ $	$F(x) \approx F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k)$ Gauß-Newton-Verfahren $s^k = \arg \min_{s \in \mathbb{R}^n} \ F'(x^k) s + F(x^k)\ $ $x^{k+1} = x^k + s^k$

Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird an Stelle des s^k 's des Gauß-Newton-Verfahren

$$s^k = \arg \min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

verwendet.