Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Interpolation

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 8.1-8.3

- Lagrange-Interpolationsaufgabe
- Effiziente Auswertung des Interpolationspolynoms
- Unterschiedliche Darstellungen des Interpolationspolynoms
- Newtonsche Darstellung

Was Sie mitnehmen sollten:

- Effiziente Auswertung eines Interpolationspolynoms
- Möglichkeiten zur Darstellung eines Interpolationspolynoms
- Newtonsche Interpolationsformel

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Bemerkungen

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j \,\middle|\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- "Lagrange": Interpolation der Funktionswerte.
- Weitere Möglichkeiten:
  - Hermite-Interpolation: zusätzlich Interpolation der Ableitungen.
  - Trigonometrische Interpolation, Spline-Interpolation, ...

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?
- Wie können wir den Fehler reduzieren?

Wichtig für: Numerische Differentiation, Integration, Computergraphik und viele weitere Anwendungen...

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Lagrange-Fundamentalpolynome

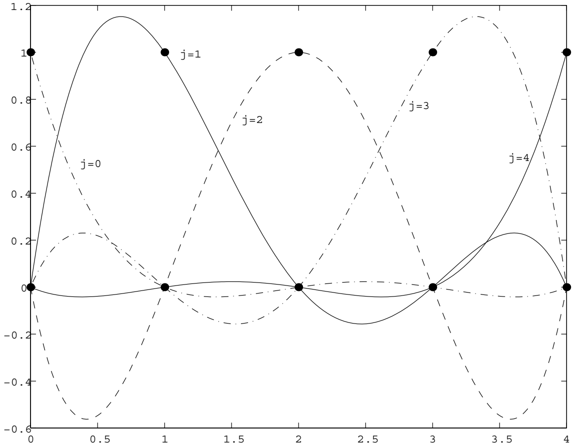
Für den Fall äquidistanter Stützstellen

$$x_j = x_0 + j\,h, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\ell}_{jn}(t) := \ell_{jn}(x_0 + t\,h) &= \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x_0 + t\,h - (x_0 + k\,h)}{x_0 + j\,h - (x_0 + k\,h)} \\
&= \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{(t-k)}{(j-k)} \\
&= \frac{(-1)^{n-j}}{j!\,(n-j)!} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} (t-k).
\end{aligned}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome



$n = 4$

$\hat{\ell}_{j4}(t)$

$t \in [0, 4]$

Existenz und Eindeutigkeit

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \ldots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms ergibt sich folgende Eigenschaft:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen $x_0 < \cdots < x_n$ gilt

$$P(Q|x_0, \ldots, x_n) = Q.$$

Begründung: Q interpoliert sich selbst und muss wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein.

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
   - Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form?
   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\boldsymbol{\Pi_n}$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) \end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als Konvexkombination der beiden interpolierende Geraden darstellbar,

$$P(f|x_0,x_1,x_2)(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} P(f|x_1,x_2)(x) + \frac{x_2-x}{x_2-x_0} P(f|x_0,x_1)(x)$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x).$$

Die Interpolierende an den Stellen $\{x_0,\ldots,x_n\}$ ist eine Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades an den Stellen $\{x_1,\ldots,x_n\}$ und $\{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$, die jeweils Teilmengen der Gesamtstützstellenmenge sind.

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x).$$

- Wir setzen für festes x

$$P_{i,k} := P(f|x_{i-k},\dots,x_i)(x), \quad 0 \le k \le i \le n,$$

d.h. speziell

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= P(f|x_0,\dots,x_n)(x), \\ P_{i,0} &= P(f|x_i)(x) = f(x_i). \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x).$$

Lemma 8.6. ergibt dann das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x-x_{i-k}}{x_i-x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-k}} \left(P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}\right) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Gegeben: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$

Gesucht: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \dots & & \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
x_3 & f(x_3) & P_{3,1} & P_{3,2} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \dots & \dots & P_{n,n}
\end{array}
$$

Beachte:

$P_{n,n}$ wird bestimmt

ohne explizite Darstellung von $P(f|x_0, \dots, x_n)$.

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$\Longrightarrow P(f \mid 0, 1, 2)(0.5) = 3\tfrac{1}{8}$$

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
   - Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form?
   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\mathbf{\Pi}_n$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung:

Mit der monomialen Basis $1,\ x, \ldots,\ x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n.$$

Die Bedingungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,\ldots,n,$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Das Gleichungssystem

$$V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

muss also zur Bestimmung der Koeffizienten a_i gelöst werden.

Die Kondition des Problems

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \to V_n^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wird durch die Konditionszahl $\kappa(V_n) = \|V_n\| \, \|V_n^{-1}\|$ beschrieben.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\| \, \|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.

  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.
- Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines linearen Gleichungssystems der Größe $(n+1) \times (n+1)$.

Beispiel 8.10.

Sei $h = 1/n$ und $x_i = 1 + i\,h, i = 0, 1, \ldots, n.$

Für diese Stützstellenverteilung hat die Vandermonde-Matrix eine Konditionszahl bzgl. der 2-Norm wie folgt:

n	4	6	8	10
$\kappa_2(V_n)$	4.1e+4	2.0e+7	1.1e+10	6.5e+12

Effiziente Methode zur Auswertung der Potenzform

Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom, das in der Potenzform vorliegt, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit bekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Es gilt

$$p(x) = a_0 + x \Big(a_1 + x \left(a_2 + \cdots + x \left(a_{n-1} + x\, a_n \right) \cdots \right) \Big).$$

Algorithmus 8.12. (Horner-Schema)

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + x\, b_{k+1}$$

Dann ist

$$p(x) = b_0.$$

Der Rechenaufwand wird etwa halbiert.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Annahme: Interpolationspolynom $P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt

Aufgabe: Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0,\ldots,x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0,\ldots,x_n)(x)$ aus $P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x) + \delta_n \underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Beachte:

- δ_n ist ein skalarer (fester) Wert.
- δ_n ist der Koeffizient der höchsten Potenz x^n.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.13.

Für die Lagrange-Interpolationspolynome

$$P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) \in \Pi_{n-1}$$

und

$$P_n(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) \in \Pi_n$$

gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n \, (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Da der Koeffizient δ_n von f und von den Stützstellen x_i abhängt, schreibt man auch

$$\delta_n =: [x_0, \ldots, x_n]f.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.14.

$\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]f$ ist offensichtlich der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n.

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$
\begin{aligned}
P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = {} & [x_0]f + (x - x_0) \cdot [x_0, x_1]f \\
& + (x - x_0)(x - x_1) \cdot [x_0, x_1, x_2]f + \cdots \\
& + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot [x_0, \ldots, x_n]f.
\end{aligned}
$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkungen:

- Die Knotenpolynome

$$
\begin{aligned}
\omega_0(x) &:= 1 \\
\omega_1(x) &:= (x - x_0) \\
&\vdots \\
\omega_n(x) &:= (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

  bilden die Newtonsche Basis von Π_n.

- Für die Koeffizienten erhält man zum Beispiel

$$
\delta_0 = [x_0]f = f(x_0)
$$

$$
\delta_1 = [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}
$$

  bzw. verallgemeinert dann …

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.16.

Seien die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0,\ldots,x_n]f = \frac{[x_1,\ldots,x_n]f - [x_0,\ldots,x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

Da $[x_i]f = f(x_i)$ erhält man das rekursive Schema

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & [x_i]f & & [x_i,x_{i+1}]f & & [x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f & & [x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]f \\ \hline
x_0 & [x_0]f & & & & & & \\
 & & > & [x_0,x_1]f & & & & \\
x_1 & [x_1]f & & & > & [x_0,x_1,x_2]f & & \\
 & & > & [x_1,x_2]f & & & > & [x_0,x_1,x_2,x_3]f \\
x_2 & [x_2]f & & & > & [x_1,x_2,x_3]f & & \vdots \\
 & & > & [x_2,x_3]f & & \vdots & & \\
x_3 & [x_3]f & & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Beispiel 8.18.

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & & \\
 & & > & -0.2950 & & & > & 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 & & \\
 & & > & -0.4790 & & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0)(x) &= 1.000 \\
P(\cos x|0, 0.2)(x) &= 1.000 - 0.0995\, x \\
P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) &= 1.000 - 0.0995\, x - 0.4888\, x\,(x - 0.2)
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18.

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \dots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$			
$x_0 = 0$	1.000			
		> -0.0995		
$x_1 = 0.2$	0.9801		> -0.4888	
		> -0.2950		> 0.0480
$x_2 = 0.4$	0.9211		> -0.4600	
		> -0.4790		
$x_3 = 0.6$	0.8253			

$$
\begin{aligned}
&P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x)\\
&\quad = P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.0480\, x\,(x-0.2)\,(x-0.4)\\
&\quad = 1.000 - 0.0995\, x - 0.4888\, x\,(x-0.2)\\
&\qquad\qquad + 0.0480\, x\,(x-0.2)\,(x-0.4).
\end{aligned}
$$

Satz 8.21.

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h.

hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab

(konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

(ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \ldots, x_k]Q = 0$

(iii) Für die Newtonsche Basispolynome ω_k gilt

$$[x_0, \ldots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \text{ für } j, k = 0, \ldots, n.$$

(iv) Sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i$, $b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i$,

$I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ hat unterschiedliche Darstellungen abhängig von der Wahl der Basis in Π_n:

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_{jn}(x), \qquad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

2. monomiale Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j, \qquad V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

3. Newtonsche Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \ldots, x_j] f\, \omega_j(x),$$ Knotenpolynome ω_j und

$$[x_0, \ldots, x_n] f = \frac{[x_1, \ldots, x_n] f - [x_0, \ldots, x_{n-1}] f}{x_n - x_0}.$$

Zusammenfasung

- Lagrange-Interpolationsaufgabe:
  $P_n \in \Pi_n$, so dass
  $$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n$$
  eindeutig lösbar.
- Effiziente Auswertung an einer oder wenigen Stellen x:
  Neville-Aitken-Schema
- Darstellung in geschlossener Form: mehrere Möglichkeiten, abhängig von der Wahl einer Basis in Π_n.
- Für die Numerik günstige Darstellung:
  Newtonsche Interpolationsformel
- Horner-Schema: effiziente Auswertung von
  $$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j, \quad (a_0, \ldots, a_n \text{ gegeben})$$

Verständnisfragen

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $\big(x_0, f(x_0)\big), \ldots, \big(x_n, f(x_n)\big)$ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms sowie $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

f $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \delta_n\,(x - x_n) + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ gilt für alle x.

Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(1) = 4$ und $f(2) = -3$.
Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1)(1.5)$. **0.5**

Es sei $f(x) = 3\,x^2 + 2$.
Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$. **0**

w Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j$.
Dann gilt $a_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.

Verständnisfragen

Es sei $P(f\,|\,x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)),\ldots,(x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms.

- W Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$, $k = 1,\ldots,n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.
- W Die Darstellung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0,\ldots,x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem der Bestimmung der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.
- W Es gilt $P(Q\,|\,x_0,\ldots,x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.