

Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Interpolation

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 8.1-8.3

- ▶ Lagrange-Interpolationsaufgabe
- ▶ Effiziente Auswertung des Interpolationspolynoms
- ▶ Unterschiedliche Darstellungen des Interpolationspolynoms
- ▶ Newtonsche Darstellung

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Effiziente Auswertung eines Interpolationspolynoms
- ▶ Möglichkeiten zur Darstellung eines Interpolationspolynoms
- ▶ Newtonsche Interpolationsformel

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Bemerkungen

- ▶ Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- ▶ “Lagrange”: Interpolation der Funktionswerte.
- ▶ Weitere Möglichkeiten:
 - ▶ Hermite-Interpolation: zusätzlich Interpolation der Ableitungen.
 - ▶ Trigonometrische Interpolation, Spline-Interpolation, ...

Fragen

- ▶ Wie interpolieren wir?
 - ▶ Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, . . .
- ▶ Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- ▶ Auswertung des Interpolationspolynoms
 - ▶ An einer oder wenigen Stellen?
 - ▶ Darstellung in geschlossener Form?
- ▶ Welchen Fehler machen wir?
- ▶ Wie können wir den Fehler reduzieren?

Wichtig für: Numerische Differentiation, Integration, Computergraphik und viele weitere Anwendungen. . .

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Lagrange-Fundamentalpolynome

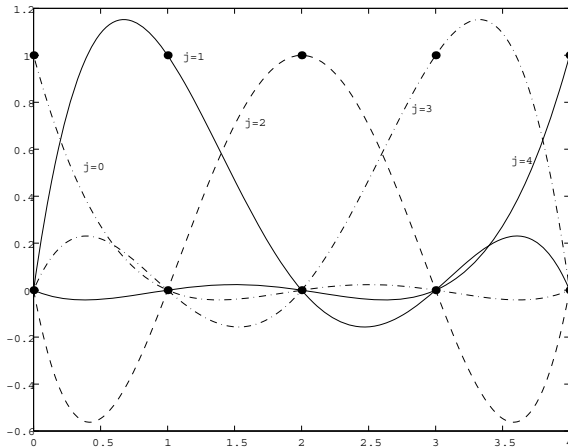
Für den Fall äquidistanter Stützstellen

$$x_j = x_0 + j h, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

gilt

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_{jn}(t) := \ell_{jn}(x_0 + t h) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x_0 + t h - (x_0 + k h)}{x_0 + j h - (x_0 + k h)} \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(t - k)}{(j - k)} \\ &= \frac{(-1)^{n-j}}{j! (n-j)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (t - k). \end{aligned}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome



$n = 4$

$\hat{\ell}_{j4}(t)$

$t \in [0, 4]$

Existenz und Eindeutigkeit

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen x_0, \dots, x_n wird mit

$$P(f|x_0, \dots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms ergibt sich folgende Eigenschaft:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ gilt

$$P(Q|x_0, \dots, x_n) = Q.$$

Begründung: Q interpoliert sich selbst und muss wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein.

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
 - ▶ Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form?
 - ↪ Wahl einer Basis in Π_n .
 - ▶ Potenzform
 - ▶ Lagrange-Interpolationsformel
 - ▶ Newton'sche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Punktweise Auswertung von $P_n(\mathbf{x})$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als **Konvex-**kombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned}P(f|x_0, x_1)(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0)\end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als **Konvexkombination** der beiden interpolierende Geraden darstellbar,

$$\begin{aligned}P(f|x_0, x_1, x_2)(x) &= \\ &\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} P(f|x_1, x_2)(x) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_0} P(f|x_0, x_1)(x)\end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(\mathbf{x})$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n)(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0} P(f|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(\mathbf{x}) \\ + \frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0} P(f|\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{n-1})(\mathbf{x}).$$

Die Interpolierende an den Stellen $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ist eine Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades an den Stellen $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ und $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{n-1}\}$, die jeweils Teilmengen der Gesamtstützstellenmenge sind.

Punktweise Auswertung von $P_n(\mathbf{x})$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, \dots, x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x).$$

► Wir setzen für festes x

$$P_{i,k} := P(f|x_{i-k}, \dots, x_i)(x), \quad 0 \leq k \leq i \leq n,$$

d.h. speziell

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= P(f|x_0, \dots, x_n)(x), \\ P_{i,0} &= P(f|x_i)(x) = f(x_i). \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, \dots, x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x).$$

Lemma 8.6. ergibt dann das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Gegeben: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$

Gesucht: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	\dots
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$P_{1,1}$		
x_2	$f(x_2)$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	
x_3	$f(x_3)$	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	\ddots
\vdots	\vdots			\ddots
x_n	$f(x_n)$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	\dots \dots $P_{n,n}$

Beachte:

$P_{n,n}$ wird bestimmt

ohne explizite Darstellung von $P(f|x_0, \dots, x_n)$.

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$.
Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der
Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$\implies P(f | 0, 1, 2)(0.5) = 3\frac{1}{8}$$

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
 - ▶ Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form?
 - ↪ Wahl einer Basis in Π_n .
 - ▶ Potenzform
 - ▶ Lagrange-Interpolationsformel
 - ▶ Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Darstellung von $P_n(\mathbf{x})$: Potenzform

Zur Erinnerung:

Mit der monomialen Basis $1, x, \dots, x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Die Bedingungen zur Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten a_i

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Darstellung von $P_n(\mathbf{x})$: Potenzform

Das Gleichungssystem

$$\mathbf{V}_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

muss also zur Bestimmung der Koeffizienten a_i gelöst werden.

Die Kondition des Problems

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{V}_n^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wird durch die Konditionszahl $\kappa(\mathbf{V}_n) = \|\mathbf{V}_n\| \|\mathbf{V}_n^{-1}\|$ beschrieben.

Darstellung von $P_n(\mathbf{x})$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- ▶ Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(\mathbf{V}_n) = \|\mathbf{V}_n\| \|\mathbf{V}_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.
⇒ Problem schlecht konditioniert.
- ▶ Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines linearen Gleichungssystems der Größe $(n + 1) \times (n + 1)$.

Beispiel 8.10.

Sei $h = 1/n$ und $x_i = 1 + ih, i = 0, 1, \dots, n$.

Für diese Stützstellenverteilung hat die Vandermonde-Matrix eine Konditionszahl bzgl. der 2-Norm wie folgt:

n	4	6	8	10
$\kappa_2(\mathbf{V}_n)$	4.1e+4	2.0e+7	1.1e+10	6.5e+12

Effiziente Methode zur Auswertung der Potenzform

Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom, das in der Potenzform vorliegt, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit bekannten Koeffizienten a_0, \dots, a_n . Es gilt

$$p(x) = a_0 + x \left(a_1 + x \left(a_2 + \cdots + x \left(a_{n-1} + x a_n \right) \cdots \right) \right).$$

Algorithmus 8.12. (Horner-Schema)

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + x b_{k+1}$$

Dann ist

$$p(x) = b_0.$$

Der Rechenaufwand wird etwa halbiert.

Darstellung von $P_n(\mathbf{x})$: Newton'sche Interpolationsformel

Annahme: Interpolationspolynom $P(f|x_0, \dots, x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt

Aufgabe: Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0, \dots, x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$ aus $P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \underbrace{\delta_n (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Beachte:

- ▶ δ_n ist ein skalarer (fester) Wert.
- ▶ δ_n ist der Koeffizient der höchsten Potenz x^n .

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.13.

Für die Lagrange-Interpolationspolynome

$$P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) \in \Pi_{n-1}$$

und

$$P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x) \in \Pi_n$$

gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Da der Koeffizient δ_n von f und von den Stützstellen x_i abhängt, schreibt man auch

$$\delta_n =: [x_0, \dots, x_n] f.$$

Darstellung von $P_n(\mathbf{x})$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.14.

$\delta_n = [x_0, \dots, x_n]f$ ist offensichtlich der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n .

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \dots, x_n)(x) &= [x_0]f + (x - x_0) \cdot [x_0, x_1]f \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \cdot [x_0, x_1, x_2]f + \dots \\ &\quad + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \cdot [x_0, \dots, x_n]f. \end{aligned}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newton'sche Interpolationsformel

Bemerkungen:

- ▶ Die Knotenpolynome

$$\omega_0(x) := 1$$

$$\omega_1(x) := (x - x_0)$$

$$\vdots$$

$$\omega_n(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

bilden die Newton'sche Basis von Π_n .

- ▶ Für die Koeffizienten erhält man zum Beispiel

$$\delta_0 = [x_0]f = f(x_0)$$

$$\delta_1 = [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

bzw. verallgemeinert dann ...

Darstellung von $P_n(x)$: Newton'sche Interpolationsformel

Lemma 8.16.

Seien die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

Da $[x_i]f = f(x_i)$ erhält man das rekursive Schema

	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
x_0	$[x_0]f$			
x_1	$[x_1]f$	$> [x_0, x_1]f$		
x_2	$[x_2]f$	$> [x_1, x_2]f$	$> [x_0, x_1, x_2]f$	
x_3	$[x_3]f$	$> [x_2, x_3]f$	$> [x_1, x_2, x_3]f$	$> [x_0, x_1, x_2, x_3]f$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Beispiel 8.18.

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \dots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$				
$x_0 = 0$	1.000				
$x_1 = 0.2$	0.9801	>	-0.0995	>	-0.4888
$x_2 = 0.4$	0.9211	>	-0.2950	>	-0.4600
$x_3 = 0.6$	0.8253	>	-0.4790	>	0.0480

$$P(\cos x|0)(x) = 1.000$$

$$P(\cos x|0, 0.2)(x) = 1.000 - 0.0995 x$$

$$P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) = 1.000 - 0.0995 x - 0.4888 x (x - 0.2)$$

Beispiel 8.18.

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \dots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$				
$x_0 = 0$	1.000				
$x_1 = 0.2$	0.9801	>	-0.0995	>	-0.4888
$x_2 = 0.4$	0.9211	>	-0.2950	>	-0.4600
$x_3 = 0.6$	0.8253	>	-0.4790	>	0.0480

$$P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x)$$

$$= P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.0480 x (x - 0.2) (x - 0.4)$$

$$= 1.000 - 0.0995 x - 0.4888 x (x - 0.2)$$

$$+ 0.0480 x (x - 0.2) (x - 0.4).$$

Satz 8.21.

Es gelten folgende Eigenschaften:

- (i) $[x_0, \dots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h.

hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab
(konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

- (ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \dots, x_k]Q = 0$

- (iii) Für die Newton'sche Basispolynome ω_k gilt

$$[x_0, \dots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \text{ für } j, k = 0, \dots, n.$$

- (iv) Sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i$, $b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i$,

$I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ hat unterschiedliche Darstellungen abhängig von der Wahl der Basis in Π_n :

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x), \quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

2. monomiale Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

3. Newton'sche Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n [x_0, \dots, x_j] f \omega_j(x), \text{ Knotenpolynome } \omega_j \text{ und}$$

$$[x_0, \dots, x_n] f = \frac{[x_1, \dots, x_n] f - [x_0, \dots, x_{n-1}] f}{x_n - x_0}.$$

Zusammenfassung

- ▶ Lagrange-Interpolationsaufgabe:

$P_n \in \Pi_n$, so dass

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

eindeutig lösbar.

- ▶ Effiziente Auswertung an einer oder wenigen Stellen x :

Neville-Aitken-Schema

- ▶ Darstellung in geschlossener Form: mehrere Möglichkeiten, abhängig von der Wahl einer Basis in Π_n .
- ▶ Für die Numerik günstige Darstellung:

Newton'sche Interpolationsformel

- ▶ Horner-Schema: effiziente Auswertung von

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad (a_0, \dots, a_n \text{ gegeben})$$

Verständnisfragen

Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms sowie $[x_0, \dots, x_n] f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

f $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = \delta_n (x - x_n) + P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ gilt für alle x .

Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(1) = 4$ und $f(2) = -3$.

Berechnen Sie $P(f | x_0, x_1)(1.5)$.

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$.

Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3] f$.

w Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$.
Dann gilt $a_n = [x_0, \dots, x_n] f$.

Verständnisfragen

Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms.

W Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n . Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n .

W Die Darstellung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem der Bestimmung der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.

W Es gilt $P(Q | x_0, \dots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n .