

Numerische Mathematik für Maschinenbauer
Interpolation II/Numerische Integration

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen:

Dahmen & Reusken Kap 8.1-8.3

- ▶ Lagrange-Interpolationsaufgabe
- ▶ Fehleranalyse
- ▶ Numerische Differentiation

Kapitel 10: Numerische Integration

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Fehlerreduktion bei Interpolation:
Erhöhung Polynomgrad oder Stützstellenanzahl?
- ▶ Numerische Differentiation:
Wie macht man das und wie wählt man die Schrittweite?
Wie macht man das und wie wählt man die Schrittweite?
- ▶ Grundidee der numerischen Integration

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Darstellung von $P_n(\mathbf{x})$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.14.

$\delta_n = [x_0, \dots, x_n]f$ ist offensichtlich der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n .

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \dots, x_n)(x) &= [x_0]f + (x - x_0) \cdot [x_0, x_1]f \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \cdot [x_0, x_1, x_2]f + \dots \\ &\quad + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \cdot [x_0, \dots, x_n]f. \end{aligned}$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ hat unterschiedliche Darstellungen abhängig von der Wahl der Basis in Π_n :

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x), \quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

2. monomiale Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

3. Newtonsche Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n [x_0, \dots, x_j] f \omega_j(x), \text{ Knotenpolynome } \omega_j \text{ und}$$

$$[x_0, \dots, x_n] f = \frac{[x_1, \dots, x_n] f - [x_0, \dots, x_{n-1}] f}{x_n - x_0}.$$

Satz 8.21.

Es gelten folgende Eigenschaften:

- (i) $[x_0, \dots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h.

hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab
(konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

- (ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \dots, x_k]Q = 0$
(iii) Für die Newtonsche Basispolynome ω_k gilt

$$[x_0, \dots, x_k]\omega_j = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ für } j, k = 0, \dots, n.$$

- (iv) Sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i$, $b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i$,

$I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Fehleranalyse — Restglieddarstellung

Satz 8.22.

Seien x_0, \dots, x_n paarweise verschiedene Stützstellen, $x \in \mathbb{R}$,

$$a := \min\{x_0, \dots, x_n\},$$

$$b := \max\{x_0, \dots, x_n\} \quad \text{und}$$

$$I := [a, b].$$

Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass gilt

$$f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \max_{y \in I} |f(y) - P(f|x_0, \dots, x_n)(y)| \\ \leq \max_{y \in I} \left| \prod_{j=0}^n (y - x_j) \right| \cdot \max_{y \in I} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Beispiel 8.24.

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- ▶ Mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, 1)(x) = -(x-0)(x-1) \frac{1}{2(1+\xi)^2}.$$

- ▶ Da $\max_{x \in [0,1]} |(x-0)(x-1)| = \frac{1}{4}$ und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, 1)(x)| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Beispiel 8.24.

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ quadratisch interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- Mit der Ableitung $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, \frac{1}{2}, 1)(x) = (x-0)(x-\frac{1}{2})(x-1) \frac{2}{3!(1+\xi)^3}$$

- Da

$$\max_{x \in [0,1]} \left| x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 1) \right| = \frac{\sqrt{3}}{36},$$

und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, 0.5, 1)(x)| \leq \frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Definiere

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^n (x - x_j) \text{ und } M_{n+1}(f) := \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

Dann erhält man für die Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

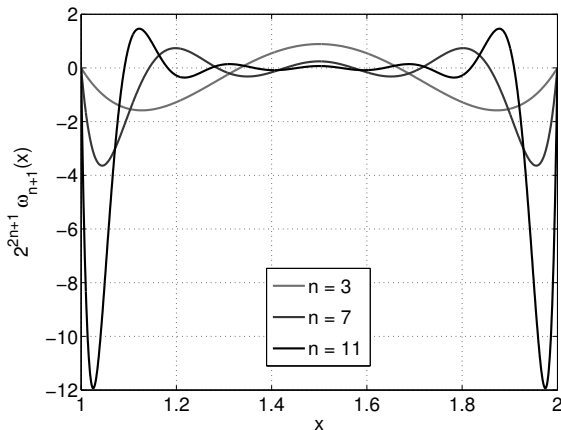
für $x \in [a, b]$ und $x_j \in [a, b]$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Beachte

- ▶ $M_{n+1}(f)$ hängt nur von f ab, aber nicht von Stützstellen
- ▶ $\omega_{n+1}(x)$ hängt nur von den Stützstellen ab, aber nicht von f .

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- ▶ Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei äquidistanten Stützstellen.
- ▶ Beispiel: $x_j = 1 + \frac{j}{n}$, $j = 0, \dots, n$ für $n = 3, 7, 11$.



Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

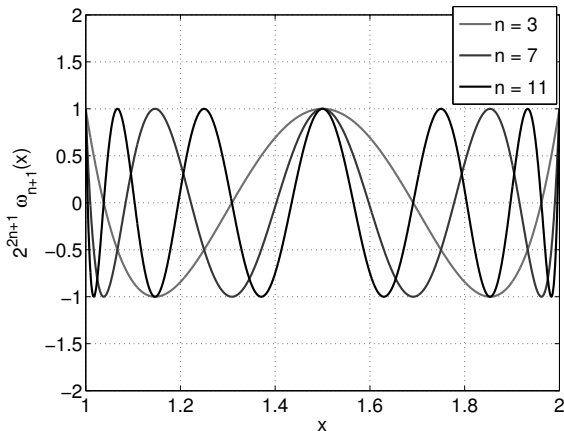
Bemerkung 8.25.

- ▶ Das Verhalten der Funktion ω_{n+1} kann für eine andere Wahl der Stützstellen wesentlich besser sein.
- ▶ Es ist bekannt, dass die Nullstellen der sogenannten Tschebyscheff-Polynome wesentlich günstiger Stützstellen liefern.
- ▶ Für diese Nullstellen gibt es explizite Formeln, z.B. für das Intervall $[1, 2]$ hat man die Formeln

$$x_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2j+1}{2n+2} \pi \right), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei Tschebyscheff-Stützstellen.



Grenzen der Polynominterpolation

Beispiel: Runges Phänomen

- ▶ Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar.

- ▶ Die Folge der Interpolationspolynome

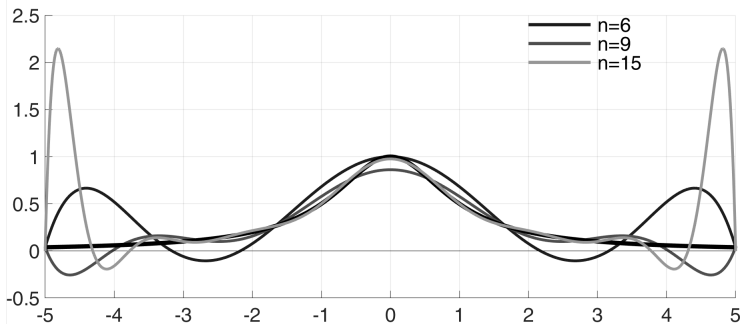
$$P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$$

mit

$$x_j = -5 + 10 \frac{j}{n}, \quad j = 0, \dots, n,$$

divergiert auf $[-5, 5]$.

Grenzen der Polynominterpolation



Fazit

Als Mittel, über immer mehr Stützstellen immer bessere Approximationen zu gewinnen, taugt die Polynominterpolation im allgemeinen **nicht**.

Fester Polynomgrad

- ▶ Sei $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$
und $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ mit n fest.
- ▶ Die Länge des Intervalls $h := b - a$ sei veränderbar.
- ▶ Falls $x \in I := [a, b]$ liegt, erhält man sofort die grobe Abschätzung

$$|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1},$$

und somit

$$\|f - P(f|x_0, \dots, x_n)\|_{L_\infty(I)} \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(I)}.$$

- ▶ Der Fehler wird kleiner, wenn die Stützstellen gemäß h zusammenrücken.

Dieser Effekt wird in den meisten Anwendungen benutzt.

Matlab-Demo

Beispiel 8.26.

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h .

- ▶ Wir erhalten (siehe Beispiel 8.24.)

$$f(x) - P(f|0, h)(x) = -(x-0)(x-h) \frac{1}{2(1+\xi)^2}.$$

- ▶ Da $\max_{x \in [0, h]} |(x-0)(x-h)| = \frac{h^2}{4}$ und $\xi > 0$ folgt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, h)(x)| \leq \frac{h^2}{8}, \quad \text{für } x \in [0, h].$$

- ▶ Der Verfahrensfehler strebt also mit der Ordnung **2** gegen **0**.

Numerische Differentiation

Zur Erinnerung: In der Newton-Interpolationsformel ist

$$\delta_n := [x_0, \dots, x_n]f$$

der Koeffizient der Potenz x^n . Daraus folgt

$$P(f|x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n! [x_0, \dots, x_n]f \approx f^{(n)}(x).$$

1. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$f'(x) \approx [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad (x \in [x_0, x_1]),$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - \frac{1}{2}h$ und $x_1 = x + \frac{1}{2}h$ (zentrale Differenzen)

$$f'(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi).$$

Numerische Differentiation

2. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen

$$x_j = x_0 + j h,$$

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx 2! [x_0, x_1, x_2] f \\ &= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \quad (x \in [x_0, x_2]), \end{aligned}$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - h$,
 $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$ schließlich

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- ▶ Differenzenquotient

$$\Delta_h := \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- ▶ Fehler in den Daten

$$\tilde{\Delta}_h := \frac{\tilde{f}(x+h) - 2\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-h)}{h^2}.$$

- ▶ Fehler in Δ_h aufgrund von Datenfehler ($|f(y) - \tilde{f}(y)| \leq \epsilon$)

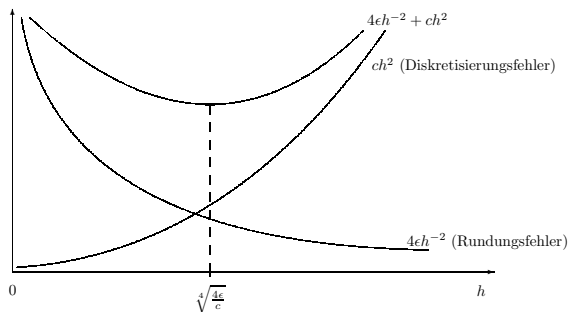
$$\begin{aligned} |\Delta_h - \tilde{\Delta}_h| &= \frac{1}{h^2} \left| \left(f(x+h) - \tilde{f}(x+h) \right) - 2 \left(f(x) - \tilde{f}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(f(x-h) - \tilde{f}(x-h) \right) \right| \leq \frac{4\epsilon}{h^2}. \end{aligned}$$

Gesamtfehler

$$\left| \tilde{\Delta}_h - f''(x) \right| \leq \left| \tilde{\Delta}_h - \Delta_h \right| + \left| \Delta_h - f''(x) \right| \leq \frac{4\epsilon}{h^2} + c h^2$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- ▶ Die Schranke wird für $h = \sqrt[4]{4\epsilon/c}$ minimal.
- ▶ Bsp: $\epsilon = 10^{-9} \Rightarrow h \approx 10^{-2}$, kleineres h vergrößert Fehler



Merke

Man sollte stets dafür sorgen, dass Rundungsfehler einen kleineren Einfluß haben als Diskretisierungsfehler.

Beispiel 8.27.

Aufgabe

Annäherung der zweiten Ableitung von $f(x) = \sin(x) + 3x^2$ an der Stelle $x = 0.6$ mit dem Differenzenquotienten

$$\Delta_h = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- ▶ Wir rechnen auf einer Maschine mit $\text{eps} \approx 10^{-16}$
- ▶ Man erwartet einen minimalen Gesamtfehler für $h \approx 10^{-4}$
- ▶ Die Tabelle bestätigt dies:

h	$\tilde{\Delta}_h$	$ \tilde{\Delta}_h - f''(x) $
10^{-2}	<u>5.4353622319</u>	4.71e-06
10^{-3}	<u>5.4353575738</u>	4.72e-08
10^{-4}	<u>5.4353575196</u>	6.98e-09
10^{-5}	<u>5.4353566092</u>	9.17e-07
10^{-6}	<u>5.4352078394</u>	1.50e-04
10^{-7}	<u>5.4400928207</u>	4.74e-03

Zusammenfassung

- ▶ Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f | x_0, \dots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

$$\text{mit } \omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad M_{n+1}(f) = \max_{x \in [a; b]} \frac{|f^{[n+1]}(x)|}{(n+1)!}$$

- ▶ Sehr hoher Polynomgrad: oft nicht günstig (Runge-Beispiel).
- ▶ Besser: fester Grad
 - + Verkleinerung des Interpolationsintervalls
 - + Wiederholung
- ▶ Numerische Differentiation:

$$f^{(n)}(x) \approx n! [x_0, \dots, x_n] f \rightsquigarrow \text{Formeln}$$

- ▶ Wahl von h : Kompromiss zwischen Diskretisierungsfehler und Rundungsfehler (Auslöschung)

Verständnisfragen

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n , das die Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

in den Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ interpoliert.

w Das Polynom $P(f|x_0, \dots, x_n)$ ist eindeutig.

f Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n , so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.

f Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation

f Der Fehler $\max_{x \in [a, b]} |P(f | x_0, \dots, x_n) - f(x)|$ hängt nicht von der Wahl der Stützstellen ab.

f $\max_{x \in [a, b]} |P(f | x_0, \dots, x_n)(x) - f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x) - f(x)|$

Evaluation

Allgemein

1.6 Die Veranstaltung interessiert mich.



n=170 mw=2,0 md=2,0 s=0,9

Konzept der Vorlesung

2.1 Die Lernziele der Vorlesung sind definiert.



n=190 mw=1,6 md=1,0 s=0,8

2.2 Die Vorlesung hat eine klar erkennbare Struktur.



n=188 mw=1,4 md=1,0 s=0,7

2.3 Die zur Verfügung gestellten Materialien sind hilfreich.



n=183 mw=2,2 md=2,0 s=1,1

2.4 Die ausgewählten Beispiele sind hilfreich.



n=188 mw=1,9 md=2,0 s=1,0

2.5 Es werden Zusammenfassungen an sinnvollen Stellen gemacht.



n=182 mw=1,6 md=1,0 s=0,8

Evaluation

Vermittlung und Verhalten

3.1 ... erklärt den Stoff verständlich.	trifft zu		trifft nicht zu	n=187	mw=1,6	md=1,0	s=0,7
3.2 ... geht auf Verständnisfragen ein.	trifft zu		trifft nicht zu	n=161	mw=1,6	md=1,0	s=0,8
3.3 ... berücksichtigt unterschiedliche Kenntnisstände der Studierenden.	trifft zu		trifft nicht zu	n=158	mw=2,2	md=2,0	s=1,0
3.4 ... schafft es, mich für den Vorlesungsstoff zu begeistern.	trifft zu		trifft nicht zu	n=182	mw=2,3	md=2,0	s=1,0
3.5 ... spricht angemessen laut und deutlich.	trifft zu		trifft nicht zu	n=188	mw=1,6	md=1,0	s=0,9
3.6 ... ist gut vorbereitet.	trifft zu		trifft nicht zu	n=187	mw=1,3	md=1,0	s=0,5
3.7 ... ist außerhalb der Vorlesung ansprechbar.	trifft zu		trifft nicht zu	n=71	mw=1,5	md=1,0	s=1,0
3.8 ... setzt Medien ein, die zum Verständnis beitragen.	trifft zu		trifft nicht zu	n=173	mw=1,9	md=2,0	s=1,0

Rahmenbedingungen

4.1 Der zeitliche Rahmen der Vorlesung wird eingehalten.	trifft zu		trifft nicht zu	n=187	mw=1,2	md=1,0	s=0,5
--	-----------	--	-----------------	-------	--------	--------	-------

Numerische Integration

Kapitel 10:

Numerische Integration

Aufgabe:

$$\int_a^b f(x) dx = ???.$$

Kondition

$$\text{Sei } I = \int_a^b f(x) dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |I - \tilde{I}| &= \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq (b - a) \|f - \tilde{f}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

⇒ absolute Kondition ist gut.

$$\frac{|I - \tilde{I}|}{|I|} \leq (b - a) \frac{\|f - \tilde{f}\|_{\infty}}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|} = \underbrace{\frac{\int_a^b \|f\|_{\infty} dx}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|}}_{= \kappa_{\text{rel}}} \frac{\|f - \tilde{f}\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}}.$$

⇒ relative Kondition kann beliebig schlecht sein.

Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile $[a, b]$ in Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ z.B. mit $t_j = a + j h$, $j = 0, \dots, n$, $h = (b - a)/n$.
2. Approximiere f auf jedem Intervall $[t_{k-1}, t_k]$ durch eine einfach zu integrierende Funktion g_k , und verwende

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx$$

als Näherung für das exakte Integral.

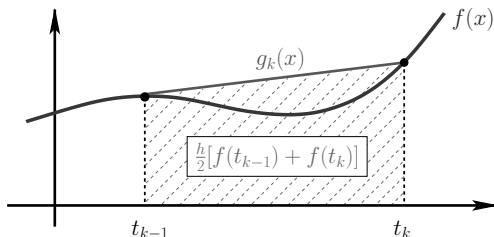
Trapezregel

- ▶ Lineare Interpolation an den Intervallenden von $[t_{k-1}, t_k]$, d.h.

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

- ▶ Das Integral ist damit gegeben durch

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx = \frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)].$$



Summierte Trapezregel

Wiederholtes Anwenden der Trapezregel auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ als Näherung für $\int_a^b f(x) dx$ liefert die

Summierte Trapezregel

$$T(h) = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

Für den Verfahrensfehler der Teilintegrale gilt folgende Darstellung:

Lemma 10.1.

Sei $f \in C^2([t_{k-1}, t_k])$. Es gilt:

$$\frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx + \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3,$$

für $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Summierte Trapezregel

Für den Verfahrensfehler des gesamten Integrals $T(h)$ ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3 \right| \\ &\leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n |f''(\xi_k)| \leq \frac{h^3}{12} n \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \end{aligned}$$

Mit $n h = b - a$ ergibt sich insgesamt die

Fehlerschranke

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{h^2}{12} (b - a) \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Summierte Trapezregel

Ebenfalls erhält man wegen

$$E(h) := T(h) - \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n h^3 \frac{f''(\xi_k)}{12} = \frac{h^2}{12} \sum_{k=1}^n h f''(\xi_k)$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h^2} = \frac{1}{12} \int_a^b f''(x) dx = \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a))$$

die

Fehlerschätzung

$$E(h) \approx \widehat{E}(h) := \frac{h^2}{12} (f'(b) - f'(a))$$