Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Numerische Integration III

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 10.5

Numerische Integration

- Wiederholung: Newton-Cotes-Formeln, Gauß-Quadratur
- Zweidimensionale Integrale

Klausuraufgaben: Verständnisfragen

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie werden Integrale und Quadraturformeln transformiert
- Wie werden zweidimensionale Integrale auf "einfachen" Gebieten approximiert

Allgemeine Quadraturformel

- Für ein typisches Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ stehe der Einfachheit halber im Folgenden $[c, d]$.
- Seien nun $x_0, \ldots, x_m \in [c, d]$ paarweise verschiedene Punkte.
- Integration des Interpolationspolynoms liefert die Quadraturformel

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx.$$

Satz 10.3.

Sei $I_m(f)$ wie oben. Für jedes Polynom $Q \in \Pi_m$ gilt

$$I_m(Q) = \int_c^d Q(x)\, dx.$$

Man sagt, die Quadraturformel ist exakt vom Grade m.

Allgemeine Quadraturformel

Lemma 10.4.

Es gibt Gewichte $c_0, \dots, c_m$, so dass $I_m(f)$ die Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j \, f(x_j)$$

hat, wobei wieder $h = d - c$.
Die c_j sind durch

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x) \, dx$$

gegeben, wobei ℓ_{jm} $(0 \leq j \leq m)$ die Lagrange-Fundamental-polynome zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_m$ sind.

Newton-Cotes-Formeln

Man kann die Quadraturformel in der Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j\, f(c + \xi_j\, h)$$

mit normierten Stützstellen ξ_j und Gewichten c_j schreiben, die jetzt unabhängig vom speziellen Intervall $[c, d]$ sind, z.B.

m		ξ_j	c_j	$I_m(f) - \int_c^d f(x)dx$
0	Mittelpunktsregel	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{24}\, h^3\, f^{(2)}(\xi)$
1	Trapezregel	$0, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}\, h^3\, f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}\, \left(\frac{1}{2}h\right)^5\, f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$-Regel	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{80}\, \left(\frac{1}{3}h\right)^5\, f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$\frac{8}{945}\, \left(\frac{1}{4}h\right)^7\, f^{(6)}(\xi)$

Gauß-Quadratur

Zielvorgabe

Entwickle für $m \in \mathbb{N}$ eine Formel

$$\sum_{i=0}^{m} \widehat{w}_i \, f(x_i) = \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x) \, dx$$

mit:

- positiven Gewichten $\widehat{w}_i, i = 0, \ldots, m$
- mit möglichst hohem Exaktheitsgrad $n \geq m$, d.h.

$$\int_c^d Q(x) \, dx = \sum_{i=0}^{m} \widehat{w}_i \, Q(x_i), \quad \forall Q \in \Pi_n.$$

Zur Erinnerung: Der Exaktheitsgrad bei Newton-Cotes-Formeln $I_m(f)$ ist entweder m oder $m+1$.

Gauß-Quadratur

- Exaktheitsgrad kann höchstens $2\,m+1$ sein.

$\Rightarrow$ Gaußsche Quadraturformeln

Satz 10.6

Sei $m \geq 0$. Es existieren Stützstellen $x_0, \dots, x_m \in (c,d)$ und positive Gewichte $w_0, \dots, w_m$, so dass mit $h = d - c$

$$h \sum_{i=0}^{m} w_i\, f(x_i) = \int_c^d f(x)\, dx + E_f(h)$$

und

$$E_Q = 0 \quad \text{für alle } Q \in \Pi_{2m+1}.$$

Ferner gilt für passendes $\xi \in [c,d]$

$$|E_f(h)| = \frac{\big((m+1)!\big)^4}{\big((2m+2)!\big)^3\ (2m+3)}\, h^{2m+3}\, \left| f^{(2m+2)}(\xi) \right|.$$

Integraltransformation

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Sei

$$I_1 = [a,b], \quad I_2 = [c,d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \to I_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung.

Es gilt die Transformationsformel

$$\int_{I_1} f(\psi(x))\,|\psi'(x)|\,dx = \int_{I_2} f(y)\,dy.$$

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, falls ψ affin ist, d.h.

$$\widehat{\psi} : [a,b] \to [c,d], \quad \widehat{\psi}(x) = \frac{x-a}{b-a}\,d + \frac{b-x}{b-a}\,c.$$

Integraltransformation

Wenn

$$Q_m(g; I_1) = (b-a)\sum_{i=0}^{m} w_i\, g(x_i)$$

eine Formel zur Annäherung von

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

ist, ergibt sich die entsprechende Formel für das Intervall $I_2 = [c, d]$:

$$\begin{aligned}\int_{I_2} f(y)\,dy &= \int_a^b f\left(\widehat{\psi}(x)\right)\,\left|\widehat{\psi}'(x)\right|\,dx \\ &= \frac{d-c}{b-a}\int_a^b f\left(\widehat{\psi}(x)\right)\,dx \\ &\approx (d-c)\sum_{i=0}^{m} w_i\, f\left(\widehat{\psi}(x_i)\right)\end{aligned}$$

Transformation von Quadraturformeln

Also insgesamt:

$$Q_m(g; I_1) = (b-a) \sum_{i=0}^{m} w_i \, g(x_i)$$

$$Q_m(f; I_2) = (d-c) \sum_{i=0}^{m} \widehat{w}_i \, f(\hat{x}_i),$$

mit

$$\widehat{w}_i = w_i,$$

$$\hat{x}_i = \frac{x_i - a}{b-a} \, d + \frac{b - x_i}{b-a} \, c.$$

Beispiel 10.11.

Gauß-Quadraturformeln werden oft für das Intervall $[-1,1]$ spezifiziert, z.B.

$$I_{[-1,1]}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left[\frac{1}{2} f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\right]$$

aus Beispiel 10.8.

Die entsprechende Formel für $[c,d]$ und $h := d-c$ lautet:

$$I_{[c,d]}(f) \approx \frac{h}{2}\left[f\left(c+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(c+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right)\right]$$

Beispiel 10.11.

Analog kann man für die Gauß-Quadratur mit 4 Stützstellen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{3} w_i\, f(x_i),$$

mit

$$\begin{aligned} w_0 = w_3 &= 0.173928, \\ w_1 = w_2 &= \frac{1}{2} - w_0, \\ -x_0 = x_3 &= 0.861136, \\ -x_1 = x_2 &= 0.339981, \end{aligned}$$

eine Formel für ein beliebiges Intervall $[c, d]$ herleiten.

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Wir betrachten nun die Transformation eines zweidimensionalen Integrals

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy, \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei

$$B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\psi : B_1 \to B_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit Jacobi-Matrix

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Es gilt folgende Transformationsformel:

Satz 10.12.

Falls $\det J(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in B_1$, so gilt

$$\int_{B_1} f(\psi(x, y))\, |\det J(x, y)|\, dx\, dy = \int_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}.$$

Für den Spezialfall, ψ affin, ergibt sich

$$\psi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^2,$$

$$|\det A| \int_{B_1} f\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\right)\, dx\, dy = \int_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}.$$

Zweidimensionales Integral

Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann man, wie im eindimensionalen Fall, eine Quadraturformel für einen Standardbereich (z.B. Einheitsquadrat, Einheitsdreieck) in eine Formel für einen affin-äquivalenten Bereich überführen.

Wichtiger Unterschied zwischen ein- und mehrdimensionaler Integration:

Zwei Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ lassen sich stets durch affine Transformationen aufeinander abbilden.

Hingegen ist es meistens nicht möglich, einfache Gebiete in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, durch eine affine Transformation ineinander zu überführen.

Beispiel 10.14. (Affine Transformationen)

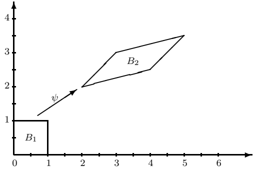
Sei $\boldsymbol{B_1 = [0,1] \times [0,1]}$ das Einheitsquadrat.

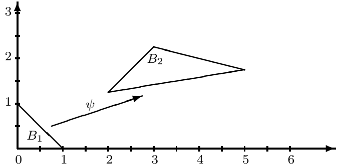
Jede affine Abbildung bildet $\boldsymbol{B_1}$ auf ein Parallelogramm ab.

Eine affine Abbildung von $\boldsymbol{B_1}$ auf den Einheitskreis

$$\boldsymbol{S = \{(x,y) \mid (x^2 + y^2) \leq 1\}}$$

ist also nicht möglich.





Für das Einheitsdreieck gilt:
Jede affine Abbildung bildet es auf ein Dreieck ab.

Integration über dem Einheitsquadrat

Gesucht ist eine numerische Näherung für

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

Sei

$$F(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx,$$

und

$$Q_m(g) = \sum_{i=0}^{m} w_i\,g(x_i) \approx \int_0^1 g(x)\,dx$$

eine Quadraturformel für dieses eindimensionale Integral.

Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 F(y)\,dy \\
&\approx \sum_{j=0}^{m} w_j\,F(x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} w_j \int_0^1 f(x,x_j)\,dx \\
&\approx \sum_{j=0}^{m} w_j \sum_{i=0}^{m} w_i\,f(x_i,x_j) \\
&= \sum_{i,j=0}^{m} w_i\,w_j\,f(x_i,x_j) =: Q_m^{(2)}(f).
\end{aligned}$$

Beispiel 10.17.

Sei

$$Q_1(g) = \frac{1}{2}g(x_0) + \frac{1}{2}g(x_1),\ x_0 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6},\ x_1 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

die eindimensionale Gauß-Quadraturformel mit zwei Stützstellen für das Intervall $[-1, 1]$.

Daraus ergibt sich die Produktregel

$$Q_1^{(2)}(f) = \frac{f(x_0, x_0) + f(x_0, x_1) + f(x_1, x_0) + f(x_1, x_1)}{4}$$

für den Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Diese Formel ist exakt für alle Linearkombinationen von Polynomen

$$x^{k_1} y^{k_2}, \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq 3$$

Integration über dem Einheitsdreieck

Für Dreiecke ist es zweckmäßig, von den Monomen

$$1, x, y, x^2, x\,y, y^2, \quad \text{usw.}$$

auszugehen und die Frage nach solchen Quadraturformeln zu stellen, die alle Monome der Form $x^{k_1}\,y^{k_2}$, $0 \leq k_1 + k_2 \leq M$ exakt integrieren.

Einige typische Beispiele:

$$\text{(i)} \quad Q(f) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{(ii)} \quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f(0,0) + f(1,0) + f(0,1)\right]$$

Integration über dem Einheitsdreieck

$$\text{(iii)}\quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\text{(iv)}\quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)\right].$$

Die Monome $1, x, y$ werden durch die Formeln in (i), (ii) exakt integriert.

Die Monome $1, x, y, x\,y, x^2, y^2$ werden durch die Formeln in (iii), (iv) exakt integriert.

Verständnisfragen VF-1

Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\mathrm{MAX}}, -x_{\mathrm{MIN}}] \cup [x_{\mathrm{MIN}}, x_{\mathrm{MAX}}]$.
Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x) - \mathrm{fl}(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen.
Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

- **f** Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $|\epsilon| \leq \mathrm{eps}$ und $\mathrm{fl}(x) = x + \epsilon$.
- **w** Die Zahl 31 ist in $\mathbb{M}(2, 6, -8, 8)$ exakt darstellbar.
- **w** Es gilt $\frac{|(x \ominus y) - (x - y)|}{|x - y|} \leq \mathrm{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$

Verständnisfragen VF-1

Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$.
Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x) - \mathrm{fl}(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen.
Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

$\boxed{\text{f}}$ Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $|\epsilon| \leq \mathrm{eps}$ und $\mathrm{fl}(x) = x + \epsilon$.

$\boxed{\text{w}}$ Die Zahl $\mathbf{31}$ ist in $\mathbb{M}(2, 6, -8, 8)$ exakt darstellbar.

$\boxed{\text{w}}$ Es gilt $\frac{|(x \ominus y) - (x - y)|}{|x - y|} \leq \mathrm{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$ mit $x \neq y$.

Frage 1: Kann für (betragsmäßig) sehr große Zahlen ($|x| >> 1$) nicht gelten:

$$\mathrm{eps} \leftrightarrow \text{relativer Fehler.}$$

Frage 2: $\mathbf{31 = 11111_2 = 0.11111_2 \cdot 2^5}$.

Frage 3: Da x und y Maschinenzahlen sind steht hier ($z = x - y$) im Prinzip:

$$\frac{|\mathrm{fl}(z) - z|}{|z|} \leq \mathrm{eps}$$

.

Verständnisfragen VF-1

Berechnen Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3, 2, -1, 3)$. 24

f Es gilt $\frac{|(x \ominus y) - (x - y)|}{|x - y|} \leq \mathrm{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$ mit $x \neq y$.

f Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.

f Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.

w Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_2\, e^{x_1}$ ist für alle (x_1, x_2) mit $|x_1| \leq 1$ gut konditioniert.

Es sei $f(x) = 1/(1 + x)$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$. 0.015

Verständnisfragen VF-1

Berechnen Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3, 2, -1, 3)$. $\boxed{24}$

$\boxed{\text{f}}$ Es gilt $\frac{|(x \ominus y) - (x - y)|}{|x - y|} \le \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$ mit $x \neq y$.

$\boxed{\text{f}}$ Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.

$\boxed{\text{f}}$ Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.

$\boxed{\text{w}}$ Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_2\, e^{x_1}$ ist für alle (x_1, x_2) mit $|x_1| \le 1$ gut konditioniert.

Es sei $f(x) = 1/(1 + x)$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$. $\boxed{0.015}$

Frage 1: $x_{\text{MAX}} = 0.22_3 \cdot 3^3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right) \cdot 27 = 18 + 6 = 24$.

Frage 2: Jetzt sind x und y **keine** Maschinenzahlen. Daher ist bedingt durch die Eingangsrundung die schlechte Kondition der Subtraktion möglich.

Frage 3: Man kann die Kondition nicht umgehen.
Beispiel:
$f(x) = x^{1000}$, $x = 1 \;\rightarrow\; \tilde{x} = 1.0001$. Dieser Eingangsfehler von 0.01% wird (bei exakter Rechnung) zu einm Ausgabefehler von mehr als 10.5%

Frage 4: Gegenbeispiel: $x = 101,\; y = 1 \;:\rightarrow\; \kappa_{rel} = 1.01$, also gut konditioniert.

Frage 5: Man rechnet leicht nach: $\kappa_{rel,x_1} = |x_1|$ und $\kappa_{rel,x_2} = 1$.

Frage 6: Hier ist $\kappa_{rel}(x) = \left| -\frac{1}{(1+x)^2}\, x \right| \Big/ \left| \frac{1}{1+x} \right| = \left| \frac{x}{1+x} \right|$.
Also $\kappa_{rel}(3) = 0.75$ und somit werden aus den 2% in der Eingabe in erster Näherung $1.5\% = 0.015$ in der Ausgabe.

Verständnisfragen VF-2

Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$ und gesucht sei die Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

f — Es sei $\tilde{\boldsymbol{x}}$ eine Annäherung der Lösung $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\,\tilde{\boldsymbol{x}}$ das zugehörige Residuum.
Es gilt $\|\boldsymbol{r}\| \leq \kappa(\boldsymbol{A})\,\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|$, mit $\kappa(\boldsymbol{A}) := \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$.

f — Es existiert stets eine untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$, so dass $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ gilt.

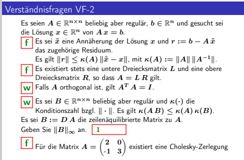
w — Falls $\boldsymbol{A}$ orthogonal ist, gilt $\boldsymbol{A}^{T}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

w — Es sei $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. $\|\cdot\|$. Es gilt $\kappa(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) \leq \kappa(\boldsymbol{A})\,\kappa(\boldsymbol{B})$.

Es sei $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{A}$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu $\boldsymbol{A}$.

Geben Sie $\|\boldsymbol{B}\|_\infty$ an. $\boxed{1}$

f — Für die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung



Verständnisfragen VF-2

Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

$\boxed{\text{f}}$ Es sei $\tilde{\boldsymbol{x}}$ eine Annäherung der Lösung $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\,\tilde{\boldsymbol{x}}$ das zugehörige Residuum.
Es gilt $\|\boldsymbol{r}\| \leq \kappa(\boldsymbol{A})\,\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|$, mit $\kappa(\boldsymbol{A}) := \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$.

$\boxed{\text{f}}$ Es existiert stets eine untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$, so dass $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ gilt.

$\boxed{\text{w}}$ Falls $\boldsymbol{A}$ orthogonal ist, gilt $\boldsymbol{A}^T\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

$\boxed{\text{w}}$ Es sei $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. $\|\cdot\|$. Es gilt $\kappa(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) \leq \kappa(\boldsymbol{A})\,\kappa(\boldsymbol{B})$.

Es sei $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{A}$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu $\boldsymbol{A}$.
Geben Sie $\|\boldsymbol{B}\|_\infty$ an. $\boxed{1}$

$\boxed{\text{f}}$ Für die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung

---

Frage 1: $\|\boldsymbol{r}\| = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\,\tilde{\boldsymbol{x}}\| = \|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\,\tilde{\boldsymbol{x}}\| = \|\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|$
$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ kann sehr klein sein. Daher ist diese Aussage falsch.

Frage 2: Nicht ohne Pivotisierung: Gegenbeispiel: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Frage 3: Definition von orthogonal.

Frage 4: $\kappa(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) = \|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\|\,\|(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1}\|$

$$\left.\begin{aligned} \|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\| &\leq \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\| \\ \|(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1}\| = \|\boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1}\| &\leq \|\boldsymbol{B}^{-1}\|\;\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \end{aligned}\right\} \quad \text{Behauptung}$$

Frage 5: Zeilenäquilibrieren $d_{ii} = 1/\sum_j |a_{ij}|$ (“in jeder Zeile”)
also so konzipiert, dass $\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}\|_\infty = 1 = \|\boldsymbol{B}\|_\infty$

Frage 6: $\boldsymbol{A}$ ist nicht einmal symmetrisch.

Verständnisfragen VF-2

Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$ und gesucht sei die Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

f Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung $\boldsymbol{x}$ über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen (gem. Vorlesung/Buch).

f Pivotisierung verbessert die Kondition der Gauß-Elimination.

w Es sei $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt:

$$|\det \boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\det(\boldsymbol{R})|}.$$

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $||\boldsymbol{A}||_1$. 8

Verständnisfragen VF-2

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

- f — Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen (gem. Vorlesung/Buch).
- f — Pivotisierung verbessert die Kondition der Gauß-Elimination.
- w — Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt:
$$|\det A^{-1}| = \frac{1}{|\det(R)|}.$$

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\|A\|_1$. 8

Frage 1: Gauß/LR-Zerlegung $\frac{1}{3}\,n^3$, $\frac{1}{6}\,n^3$ ist Cholesky/$L\,D\,L^T$-Zerlegung

Frage 2: Pivotisierung stabilisiert (den Algorithmus)
Zusatz: äquilibrierung liefert eine Matrix mit i. A. besserer ∞-Kondition.

Frage 3: Da $P\,A = LR$ gilt $\det P \cdot \det A = \det L \cdot \det R$ also

$$\pm \det A = \det R$$

Da aus $A\,A^{-1} = I$ zudem $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ folgt, gilt

$$|\det A^{-1}| = \frac{1}{|\det A|} = \frac{1}{|\det R|}$$

Frage 4: $\|\cdot\|_1$ Spaltensummennorm $\max\{6, 4, 8\} = 8$

Verständnisfragen VF-3

Es seien $\boldsymbol{A}$ eine symmetrisch positiv definite $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$-Matrix, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$ die Cholesky-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$.

f Es gilt $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \|\boldsymbol{D}\|_2$.

f Das Problem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist immer gut konditioniert.

w Das Cholesky-Vefahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist ein stabiles Verfahren.

f Für die stabile Berechnung einer $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$-Zerlegung $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ von $\boldsymbol{A}$ ist Pivotisierung notwendig.

Es sei $\boldsymbol{Q}$ eine orthogonale Matrix und $\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$.

Geben Sie $|\boldsymbol{c}|$ an. 13

f Es gilt $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$.

Verständnisfragen VF-3

Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.

f Es gilt $\|A\|_2 = \|D\|_2$.

f Das Problem $A\,x = b$ ist immer gut konditioniert.

w Das Cholesky-Vefahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist ein stabiles Verfahren.

f Für die stabile Berechnung einer $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A ist Pivotisierung notwendig.

Es sei Q eine orthogonale Matrix und $Q\begin{pmatrix}5\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\c\\0\end{pmatrix}$. Geben Sie $|c|$ an. 13

f Es gilt $A^{-1} = L\,D^{-1}\,L^T$.

Frage 1: Dazu müsste z. B. L orthogonal sein. (Also $\|L\| = \|I\|$). Gegenbeispiel:

$$L = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \quad D = I, \quad L\,D\,L^T = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \text{ offenbar } \|I\|_1 \neq \left\|\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\right\|_1$$

Frage 2: Es gibt auch schlecht konditionierte "s.p.d." Probleme. Beispielsweise Hilbert-Matrizen. (hier mit Shift)

$$H = \begin{pmatrix}\frac{1}{1000} & \frac{1}{1001}\\ \frac{1}{1001} & \frac{1}{1002}\end{pmatrix}, \quad \kappa_2(H) = 42.1513$$

Frage 3: Cholesky ist von der Stabilität mit Skalierung und Pivotisierung bei nicht s.p.d. Matrizen vergleichbar.(Pivotisierung weder notwendig noch sinvoll.)

Frage 4: Da A s.p.d., hier nicht erforderlich.

Frage 5: Anwendung von Q ändert Länge nicht. $\rightarrow |c| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

Frage 6: $A = L\,D\,L^T \Rightarrow A^{-1} = L^{-T}\,D^{-1}\,L^{-1}$

Verständnisfragen VF-3

Es seien $\boldsymbol{A}$ eine symmetrisch positiv definite $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$-Matrix, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$ die Cholesky-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$.

- **w** Das Produkt zweier Givens-Rotations-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.
- **f** Es seien $\boldsymbol{Q_v} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}}$ eine Householder-Transformations-Matrix und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ beliebig. Es gilt $\|\boldsymbol{Q_v}\,\boldsymbol{x}\|_\infty = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$.
- **f** Die Berechnung einer $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$ von $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix $\boldsymbol{B}$ vollen Spaltenrang hat.

Es sei $\boldsymbol{Q_v}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix $\boldsymbol{Q_v}$ an. **1**

Verständnisfragen VF-3

Es seien $\boldsymbol{A}$ eine symmetrisch positiv definite $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$-Matrix, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$ die Cholesky-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$.

- **w** Das Produkt zweier Givens-Rotations-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.
- **f** Es seien $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}}$ eine Householder-Transformations-Matrix und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ beliebig. Es gilt $\|\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}}\,\boldsymbol{x}\|_\infty = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$.
- **f** Die Berechnung einer $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$-Zerlegung $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$ von $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix $\boldsymbol{B}$ vollen Spaltenrang hat.

Es sei $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}}$ an. $\boxed{1}$

Frage 1: Das Produkt orthogonaler Matrizen ist orthogonal.

$$(\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2)\,(\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2)^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{Q}_1\,(\boldsymbol{Q}_2\,\boldsymbol{Q}_2^{\boldsymbol{T}})\,\boldsymbol{Q}_1^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_1^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I}$$

Frage 2: "falsche" Norm. Gilt nur für die $\mathbf{2}$-Norm.

Frage 3: Orthogonale Matrizen bilden auch für Matrizen mit Rangdefekt ein stabiles Verfahren zur Berechnung der $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$-Zerlegung

Frage 4: $\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{x}$: für $\|\cdot\|_2$ gilt

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{x}\|_2 = |\boldsymbol{\lambda}|\,\|\boldsymbol{x}\|_2 \text{ also } |\boldsymbol{\lambda}| = \mathbf{1}$$

Verständnisfragen VF-4

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix} \widetilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\widetilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es sei $x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2 \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.

$\boxed{\text{w}}$ Je kleiner der Winkel Θ, desto kleiner ist die Größe $\frac{\|A\,x^* - b\|_2}{\|b\|_2}$.

$\boxed{\text{f}}$ Es gilt $\tilde{R}\,x^* = Q^T\,b$.

$\boxed{\text{w}}$ Die Matrix $\tilde{R}$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen.

$\boxed{\text{f}}$ Es gilt $\det\widetilde{R} = \det A$.

Verständnisfragen VF-4

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathbf{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix} \widetilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\widetilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es sei $x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2 \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.

- $\boxed{\text{w}}$ Je kleiner der Winkel Θ, desto kleiner ist die Größe $\frac{\|A\,x^* - b\|_2}{\|b\|_2}$.
- $\boxed{\text{f}}$ Es gilt $\tilde{R}\,x^* = Q^T\,b$.
- $\boxed{\text{w}}$ Die Matrix $\tilde{R}$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen.
- $\boxed{\text{f}}$ Es gilt $\det\widetilde{R} = \det A$.

Frage 1: $\sin\theta = \dfrac{\|A\,x^* - b\|_2}{\|b\|_2}$

Frage 2: "doppelt" falsch.

a) Dimensionen passen nicht $\widetilde{R}\,x^* \in \mathbb{R}^n$, $Q^T\,b \in \mathbb{R}^m$

b) $Q\,A = R$: Aber mit $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = Q\,b + \widetilde{R}\,x^* = b_1$

Frage 3: Givens-Rotationen sind orthogonale Transformationen

Frage 4: $\det A$ ist überhaupt nicht definiert.

Verständnisfragen VF-4

Es seien $m = 4$, $n = 3$ und $Q\,b = (1, 0, 3, -4)^T$.

Bestimmen Sie $\|A\,x^* - b\|_2$. $\boxed{4}$

$\boxed{w}$ Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{f}$ Durch eine geeignete Wahl des skalaren Parameters im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems wird die Konvergenzordnung der Methode in der Regel erhöht.

$\boxed{w}$ Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.

$\boxed{f}$ Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist immer maximal 1.

Es sei $\Theta = 0$. Bestimmen Sie $\|A\,x^* - b\|_2$. $\boxed{0}$

Verständnisfragen VF-4

Es seien $\boldsymbol{m = 4}$, $\boldsymbol{n = 3}$ und $\boldsymbol{Q\,b = (1, 0, 3, -4)^T}$.
Bestimmen Sie $\|\boldsymbol{A\,x^* - b}\|_2$. $\boxed{4}$

$\boxed{\text{w}}$ Es gilt $\|\boldsymbol{A\,x - b}\|_2 = \|\boldsymbol{R\,x - Q\,b}\|_2$ für beliebiges $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{f}}$ Durch eine geeignete Wahl des skalaren Parameters im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems wird die Konvergenzordnung der Methode in der Regel erhöht.

$\boxed{\text{w}}$ Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.

$\boxed{\text{f}}$ Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist immer maximal 1.

Es sei $\boldsymbol{\Theta = 0}$. Bestimmen Sie $\|\boldsymbol{A\,x^* - b}\|_2$. $\boxed{0}$

Frage 1: Wie in der Antwort zur zweiten Frage dieses Abschnitts.
$\|\boldsymbol{A\,x - b}\|_2 = \|\boldsymbol{R\,x - Q\,b}\|_2$. $\boldsymbol{R\,x^* = b_1}$, $\|\boldsymbol{b_2}\|_2$ Residuum.
Hier $\boldsymbol{b_2 = (-4)}$.

Frage 2: Siehe Frage 1

Frage 3: Der Parameter dient zur Dämpfung der Korrektur. Ordnung bleibt. Konvergiert möglicherweise langsamer, dafür aber auch dann, wenn Gauß-Newton nicht konvergiert.

Frage 4: Formal $\boldsymbol{x^{k+1} = x^k - \left(F'(x^k)^T\,F'(x^k)\right)^{-1}\;F'(x^k)^T\,x^k}$

Frage 5: Kann auch höher sein.
Falls $\|\boldsymbol{F(x^*)}\| = \boldsymbol{0}$ mindestens 2 (lokal!)

Frage 6: Siehe erste Fragen in diesem Abschnitt

Verständnisfragen VF-5

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.
Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.
Für $n = 1$ sei außerdem $\Phi_1(x) := \frac{1}{4}x^2 - 1$.

f Es gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.

f Die Konvergenzordung der Fixpunktiteration ist maximal 2.

f Das Fixpunktproblem $\Phi_1(x)=x$ hat eine eindeutige Lösung x^*in $\mathbb{R}$.

w Für Φ_1 sind auf dem Intervall $[-1, 0]$ alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Verständnisfragen VF-5

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.
Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.
Für $n = 1$ sei außerdem $\Phi_1(x) := \frac{1}{4}\,x^2 - 1$.

$\boxed{\text{f}}$ Es gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.

$\boxed{\text{f}}$ Die Konvergenzordung der Fixpunktiteration ist maximal 2.

$\boxed{\text{f}}$ Das Fixpunktproblem $\Phi_1(x)=x$ hat eine eindeutige Lösung x^*in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{w}}$ Für Φ_1 sind auf dem Intervall $[-1, 0]$ alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Frage 1: Es gibt auch "abstoßende" Fixpunkte

Frage 2: $\Phi(x) = x^p$ hat Konvergenzordnung p, denn $x^* = 0$,

$$\Phi'(x^*) = \ldots = \Phi^{(p-1)}(x^*) = 0$$

und

$$\Phi^{(p)}(x^*) = p! \neq 0.$$

Frage 3: $\Phi_1(x) = \frac{1}{4}\,x^2 - 1 = x$ hat genau 2 Lösungen.

$$x^2 - 4\,x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8}$$

Frage 4: Φ_1 ist auf $[-1, 0]$ monoton fallend, also $\Phi_1([-1, 0]) \in [-1, -\frac{3}{4}]$
$\Phi_1'(x) = \frac{1}{2}\,x$ also $|\Phi_1'(x)| \leq \frac{1}{2}$ auf $[-1, 0]$.

Verständnisfragen VF-5

Wir betrachten die Fixpunktiteration zur Bestimmung einer Lösung $x^* < 0$ des Fixpunktproblems $\Phi_1(x) = x$, mit einem Startwert x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*. Geben Sie die Konvergenzordnung dieser Methode an. $\boxed{1}$

$\boxed{f}$ Bei der Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion f, müssen die Startwerte x_0, x_1 so gewählt werden dass $f(x_0)\,f(x_1) < 0$ gilt.

$\boxed{w}$ Es sei $f(x) = x^2 - 3$. Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.

$\boxed{f}$ Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle kann man nur bei skalarwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwenden.

Verständnisfragen VF-5

Wir betrachten die Fixpunktiteration zur Bestimmung einer Lösung $x^* < 0$ des Fixpunktproblems $\Phi_1(x) = x$, mit einem Startwert x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*. Geben Sie die Konvergenzordnung dieser Methode an. 1

- f Bei der Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion f, müssen die Startwerte x_0, x_1 so gewählt werden dass $f(x_0)\,f(x_1) < 0$ gilt.
- w Es sei $f(x) = x^2 - 3$. Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.
- f Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle kann man nur bei skalarwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwenden.

Frage 1: $\Phi'(x)$ hat nur $x = 0$ als Nullstelle $\Rightarrow \Phi'(x^*) \neq 0$
$\Rightarrow$ Konvergenzordnung maximal 1. Es folgt genau 1

Frage 2: Muss nicht sein. Man verliert den Einschluss ja auch (vorübergehend) während der Iteration

Frage 3:

$$x_0 \in [0, \sqrt{3}] \to x_1 < \sqrt{3}$$

$$x_0 > \sqrt{3} \to \sqrt{3} < x_{i+i} < x_0$$

Frage 4: Geht mehrdimensional genauso.

Verständnisfragen VF-5

$\boxed{f}$ Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$.
Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton-Methode

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert.
Dann gilt: $|x^* - x_k| \approx (x_{k+1} - x_k)^2$ für k hinreichend groß.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$.
Wir betrachten das Fixpunktproblem auf dem Intervall $[0, 1]$.
Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. $\boxed{0.5}$

Verständnisfragen VF-5

f Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$.
Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton-Methode

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert.
Dann gilt: $|x^* - x_k| \approx (x_{k+1} - x_k)^2$ für k hinreichend groß.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$.
Wir betrachten das Fixpunktproblem auf dem Intervall $[0, 1]$.
Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. 0.5

Frage 1: Richtig wäre

$$|x^* - x_k| \approx |x_{k+1} - x_k|$$

oder

$$|x_{k+1} - x^*| \leq c\,|x_k - x^*|^2.$$

Frage 2: $[0, 1]$ wird durch $e^{-\frac{1}{2}x}$ auf $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$ abgebildet.

$$\Phi'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \to |\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2} = 0.5 \text{ auf } [0, 1]$$

Verständnisfragen VF-6

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \cdot < x_n = b$. Weiter sei $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

- **f** Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = (x - x_n)[x_0, \ldots, x_n]f + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$.
- **w** Es sei Π_n der Raum der reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_k(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, $\omega_0(x) := 1$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.
- **w** Die Auswertung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem (Auswertung) bezüglich der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.
- **w** Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} |P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.

Es sei $f(x) = 3\,x^2 + 2$. $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$ ist gleich **0**

Verständnisfragen VF-6

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \cdot < x_n = b$. Weiter sei $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

- f — Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = (x - x_n)[x_0, \ldots, x_n]f + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$.
- w — Es sei Π_n der Raum der reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_k(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, $\omega_0(x) := 1$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.
- w — Die Auswertung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem (Auswertung) bezüglich der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.
- w — Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} |P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$. $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$ ist gleich $\boxed{0}$

Frage 1: a) Polynomgrad nur $n - 1$
b) $(x - x_n) \Rightarrow \prod_{i=0}^{n-i}(x - x_i]$

Frage 2: Das ist die Newtonsche Basis

Frage 3: Beispiel Kondition bzgl. a_0.

$$\frac{\partial P(x)}{\partial a_0} = 1 \Rightarrow \kappa_{rel,a_0} = \left| \frac{a_0}{P(x)} \right|$$

a_0 ist groß, $|P(x)|$ klein, daher ist κ_{rel,a_0} groß.

Frage 4: Wir hatten z. B. das Beispiel von Runge und

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$ Abhg. von x_i.

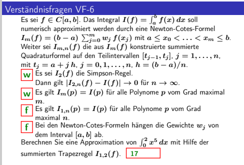
Frage 5: $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$ ist der führende Koeffizient von $P(f \mid x_0, \ldots, x_3)$, d.h. der Koeffizient von x^4, also 0.

Verständnisfragen VF-6

Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j\, f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_{m,n}(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + j\,h$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = (b-a)/n$.

- w — Es sei $I_2(f)$ die Simpson-Regel. Dann gilt $|I_{2,n}(f) - I(f)| \to 0$ für $n \to \infty$.
- w — Es gilt $I_m(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal m.
- f — Es gilt $I_{1,n}(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal n.
- f — Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Interval $[a,b]$ ab.

Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^5\,dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel $I_{1,2}(f)$. 17



Verständnisfragen VF-6

Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j\, f(x_j)$ mit $a \le x_0 < \ldots < x_m \le b$. Weiter sei $I_{m,n}(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + j\,h$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = (b-a)/n$.

- $\boxed{w}$ Es sei $I_2(f)$ die Simpson-Regel. Dann gilt $|I_{2,n}(f) - I(f)| \to 0$ für $n \to \infty$.
- $\boxed{w}$ Es gilt $I_m(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal m.
- $\boxed{f}$ Es gilt $I_{1,n}(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal n.
- $\boxed{f}$ Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Interval $[a,b]$ ab.

Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^5\,dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel $I_{1,2}(f)$. $\boxed{17}$

Frage 1: Stetigkeit reicht bereits für die Konvergenz der summierten Regeln. Mit $f \in C^4[a,b]$ hätten wir hier sogar $\mathcal{O}(h^4)$, $h = (b-a)/n$

Frage 2: Der Exaktheitsgrad von Newton-Cotes-Formeln ist m oder $m+1$, also ist m immer OK.

Frage 3: Summation ändert **nicht** den Exaktheitsgrad

Frage 4: Weil wir die Darstellung $h\sum_i w_i f(x_i)$ wählen, sind die Gewichte nicht intervallabhängig.

Frage 5: $\frac{1}{2}(0^5 + 2\cdot 1^5 + 2^5) = \frac{34}{2} = 17$