

Numerische Mathematik für Maschinenbauer
Numerische Integration III

A. Reusken

K.-H. Brakhage, Saskia Dietze, Thomas Jankuhn

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2018

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 10.5

Numerische Integration

- ▶ Wiederholung: Newton-Cotes-Formeln, Gauß-Quadratur
- ▶ Zweidimensionale Integrale

Klausuraufgaben: Verständnisfragen

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie werden Integrale und Quadraturformeln transformiert
- ▶ Wie werden zweidimensionale Integrale auf “einfachen” Gebieten approximiert

Allgemeine Quadraturformel

- ▶ Für ein typisches Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ stehe der Einfachheit halber im Folgenden $[c, d]$.
- ▶ Seien nun $x_0, \dots, x_m \in [c, d]$ paarweise verschiedene Punkte.
- ▶ Integration des Interpolationspolynoms liefert die Quadraturformel

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx.$$

Satz 10.3.

Sei $I_m(f)$ wie oben. Für jedes Polynom $Q \in \Pi_m$ gilt

$$I_m(Q) = \int_c^d Q(x) dx.$$

Man sagt, die Quadraturformel ist **exakt vom Grade m** .

Allgemeine Quadraturformel

Lemma 10.4.

Es gibt Gewichte c_0, \dots, c_m , so dass $I_m(f)$ die Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$$

hat, wobei wieder $h = d - c$.

Die c_j sind durch

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x) dx$$

gegeben, wobei ℓ_{jm} ($0 \leq j \leq m$) die Lagrange-Fundamentalpolynome zu den Stützstellen x_0, \dots, x_m sind.

Newton-Cotes-Formeln

Man kann die Quadraturformel in der Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(c + \xi_j h)$$

mit normierten Stützstellen ξ_j und Gewichten c_j schreiben, die jetzt unabhängig vom speziellen Intervall $[c, d]$ sind, z.B.

m		ξ_j	c_j	$I_m(f) - \int_c^d f(x) dx$
0	Mittelpunktsregel	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{24} h^3 f^{(2)}(\xi)$
1	Trapezregel	0, 1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12} h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90} \left(\frac{1}{2}h\right)^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$ -Regel	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{80} \left(\frac{1}{3}h\right)^5 f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$\frac{8}{945} \left(\frac{1}{4}h\right)^7 f^{(6)}(\xi)$

Gauß-Quadratur

Zielvorgabe

Entwickle für $m \in \mathbb{N}$ eine Formel

$$\sum_{i=0}^m \hat{w}_i f(x_i) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx$$

mit:

- ▶ positiven Gewichten $\hat{w}_i, i = 0, \dots, m$
- ▶ mit möglichst hohem Exaktheitsgrad $n \geq m$, d.h.

$$\int_c^d Q(x) dx = \sum_{i=0}^m \hat{w}_i Q(x_i), \quad \forall Q \in \Pi_n.$$

Zur Erinnerung: Der Exaktheitsgrad bei Newton-Cotes-Formeln $I_m(f)$ ist entweder m oder $m + 1$.

Gauß-Quadratur

- ▶ Exaktheitsgrad kann höchstens $2m + 1$ sein.
 \Rightarrow Gaußsche Quadraturformeln

Satz 10.6

Sei $m \geq 0$. Es existieren Stützstellen $x_0, \dots, x_m \in (c, d)$ und positive Gewichte w_0, \dots, w_m , so dass mit $h = d - c$

$$h \sum_{i=0}^m w_i f(x_i) = \int_c^d f(x) dx + E_f(h)$$

und

$$E_Q = 0 \quad \text{für alle } Q \in \Pi_{2m+1}.$$

Ferner gilt für passendes $\xi \in [c, d]$

$$|E_f(h)| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3 (2m+3)} h^{2m+3} \left| f^{(2m+2)}(\xi) \right|.$$

Integraltransformation

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Sei

$$I_1 = [a, b], \quad I_2 = [c, d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \rightarrow I_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung.

Es gilt die Transformationsformel

$$\int_{I_1} f(\psi(x)) |\psi'(x)| dx = \int_{I_2} f(y) dy.$$

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, falls ψ affin ist, d.h.

$$\hat{\psi} : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \hat{\psi}(x) = \frac{x-a}{b-a} d + \frac{b-x}{b-a} c.$$

Integraltransformation

Wenn

$$Q_m(g; I_1) = (b - a) \sum_{i=0}^m w_i g(x_i)$$

eine Formel zur Annäherung von

$$\int_a^b g(x) dx$$

ist, ergibt sich die entsprechende Formel für das Intervall $I_2 = [c, d]$:

$$\begin{aligned} \int_{I_2} f(y) dy &= \int_a^b f(\hat{\psi}(x)) |\hat{\psi}'(x)| dx \\ &= \frac{d - c}{b - a} \int_a^b f(\hat{\psi}(x)) dx \\ &\approx (d - c) \sum_{i=0}^m w_i f(\hat{\psi}(x_i)) \end{aligned}$$

Transformation von Quadraturformeln

Also insgesamt:

$$Q_m(g; I_1) = (b - a) \sum_{i=0}^m w_i g(x_i)$$

$$Q_m(f; I_2) = (d - c) \sum_{i=0}^m \hat{w}_i f(\hat{x}_i),$$

mit

$$\hat{w}_i = w_i,$$

$$\hat{x}_i = \frac{x_i - a}{b - a} d + \frac{b - x_i}{b - a} c.$$

Beispiel 10.11.

Gauß-Quadraturformeln werden oft für das Intervall $[-1, 1]$ spezifiziert, z.B.

$$I_{[-1,1]}(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \left[\frac{1}{2} f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \right]$$

aus Beispiel 10.8.

Die entsprechende Formel für $[c, d]$ und $h := d - c$ lautet:

$$I_{[c,d]}(f) \approx \frac{h}{2} \left[f\left(c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \right]$$

Beispiel 10.11.

Analog kann man für die Gauß-Quadratur mit 4 Stützstellen

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \sum_{i=0}^3 w_i f(x_i),$$

mit

$$\begin{aligned}w_0 &= w_3 = 0.173928, \\w_1 &= w_2 = \frac{1}{2} - w_0, \\-x_0 &= x_3 = 0.861136, \\-x_1 &= x_2 = 0.339981,\end{aligned}$$

eine Formel für ein beliebiges Intervall $[c, d]$ herleiten.

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Wir betrachten nun die Transformation eines zweidimensionalen Integrals

$$\int_B f(x, y) \, dx \, dy, \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei

$$B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\psi : B_1 \rightarrow B_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit Jacobi-Matrix

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Es gilt folgende Transformationsformel:

Satz 10.12.

Falls $\det J(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in B_1$, so gilt

$$\int_{B_1} f(\psi(x, y)) |\det J(x, y)| dx dy = \int_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Für den Spezialfall, ψ affin, ergibt sich

$$\psi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^2,$$

$$|\det A| \int_{B_1} f \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \right) dx dy = \int_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Zweidimensionales Integral

Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann man, wie im eindimensionalen Fall, eine Quadraturformel für einen Standardbereich (z.B. Einheitsquadrat, Einheitsdreieck) in eine Formel für einen affin-äquivalenten Bereich überführen.

Wichtiger Unterschied zwischen ein- und mehrdimensionaler Integration:

Zwei Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ lassen sich stets durch affine Transformationen aufeinander abbilden.

Hingegen ist es meistens nicht möglich, einfache Gebiete in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, durch eine affine Transformation ineinander zu überführen.

Beispiel 10.14. (Affine Transformationen)

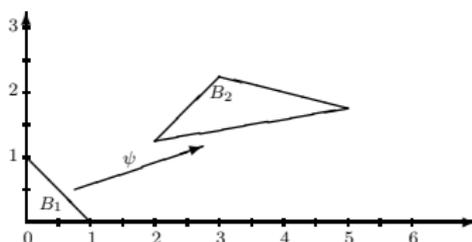
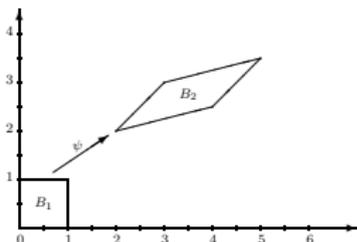
Sei $B_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ das Einheitsquadrat.

Jede affine Abbildung bildet B_1 auf ein Parallelogramm ab.

Eine affine Abbildung von B_1 auf den Einheitskreis

$$S = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2) \leq 1\}$$

ist also nicht möglich.



Für das Einheitsdreieck gilt:

Jede affine Abbildung bildet es auf ein Dreieck ab.

Integration über dem Einheitsquadrat

Gesucht ist eine numerische Näherung für

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy.$$

Sei

$$F(y) := \int_0^1 f(x, y) \, dx,$$

und

$$Q_m(g) = \sum_{i=0}^m w_i g(x_i) \approx \int_0^1 g(x) \, dx$$

eine Quadraturformel für dieses eindimensionale Integral.

Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 F(y) \, dy \\ &\approx \sum_{j=0}^m w_j F(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^m w_j \int_0^1 f(x, x_j) \, dx \\ &\approx \sum_{j=0}^m w_j \sum_{i=0}^m w_i f(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i,j=0}^m w_i w_j f(x_i, x_j) =: Q_m^{(2)}(f). \end{aligned}$$

Beispiel 10.17.

Sei

$$Q_1(g) = \frac{1}{2} g(x_0) + \frac{1}{2} g(x_1), \quad x_0 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad x_1 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

die eindimensionale Gauß-Quadraturformel mit zwei Stützstellen für das Intervall $[-1, 1]$.

Daraus ergibt sich die Produktregel

$$Q_1^{(2)}(f) = \frac{f(x_0, x_0) + f(x_0, x_1) + f(x_1, x_0) + f(x_1, x_1)}{4}$$

für den Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Diese Formel ist exakt für alle Linearkombinationen von Polynomen

$$x^{k_1} y^{k_2}, \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq 3$$

Integration über dem Einheitsdreieck

Für Dreiecke ist es zweckmäßig, von den Monomen

$$1, x, y, x^2, x y, y^2, \quad \text{usw.}$$

auszugehen und die Frage nach solchen Quadraturformeln zu stellen, die alle Monome der Form $x^{k_1} y^{k_2}$, $0 \leq k_1 + k_2 \leq M$ exakt integrieren.

Einige typische Beispiele:

$$(i) \quad Q(f) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(ii) \quad Q(f) = \frac{1}{6} [f(0, 0) + f(1, 0) + f(0, 1)]$$

Integration über dem Einheitsdreieck

$$(iii) \quad Q(f) = \frac{1}{6} \left[f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$(iv) \quad Q(f) = \frac{1}{6} \left[f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right].$$

Die Monome $1, x, y$ werden durch die Formeln in (i), (ii) exakt integriert.

Die Monome $1, x, y, xy, x^2, y^2$ werden durch die Formeln in (iii), (iv) exakt integriert.

Verständnisfragen VF-1

Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(\mathbf{b}, \mathbf{m}, \mathbf{r}, \mathbf{R})$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$.

Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{b}, \mathbf{m}, \mathbf{r}, \mathbf{R})$ die Standardrundung, und es sei \ominus (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für \mathbb{M} , d.h.: $x \ominus y := \text{fl}(\text{fl}(x) - \text{fl}(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in \mathbb{D} liegen.

Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

f Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $|\epsilon| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \epsilon$.

w Die Zahl **31** ist in $\mathbb{M}(\mathbf{2}, \mathbf{6}, -\mathbf{8}, \mathbf{8})$ exakt darstellbar.

w Es gilt $\frac{|(x \ominus y) - (x - y)|}{|x - y|} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(\mathbf{b}, \mathbf{m}, \mathbf{r}, \mathbf{R})$

Es seien x_{\min} bzw. x_{\max} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $M(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $D := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : D \rightarrow M(b, m, r, R)$ die Standardrundung, und es sei \ominus (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für M , d.h. $x \ominus y := \text{fl}(B(x) - B(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in D liegen. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

f Für jedes $x \in D$ existiert eine Zahl e mit $|e| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + e$.

w Die Zahl 31 ist in $M(2, 6, -8, 8)$ exakt darstellbar.

w Es gilt $\frac{|\text{fl}(xy) - (xy)|}{|xy|} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in M(b, m, r, R)$ mit $x \neq y$.

Frage 1: Kann für (betragsmäßig) sehr große Zahlen ($|x| \gg 1$) nicht gelten:

$\text{eps} \leftrightarrow$ relativer Fehler.

Frage 2: $31 = 11111_2 = 0.11111_2 \cdot 2^5$.

Frage 3: Da x und y Maschinenzahlen sind steht hier ($z = x - y$) im Prinzip:

$$\frac{|\text{fl}(z) - z|}{|z|} \leq \text{eps}$$

Verständnisfragen VF-1

Berechnen Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3, 2, -1, 3)$. 24

f Es gilt $\frac{|(x \ominus y) - (x - y)|}{|x - y|} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$ mit $x \neq y$.

f Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.

f Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.

w Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1}$ ist für alle (x_1, x_2) mit $|x_1| \leq 1$ gut konditioniert.

Es sei $f(x) = 1/(1 + x)$ und \tilde{x} ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$. 0.015

Berechnen Sie x_{MAX} für $M(3, 2, -1, 3)$. Es gilt $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \epsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $x \neq y$. Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler. Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1}$ ist für alle (x_1, x_2) mit $|x_1| \leq 1$ gut konditioniert.Es sei $f(x) = 1/(1+x)$ und β ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\beta)$ als Annäherung für $f(x)$. Frage 1: $x_{\text{MAX}} = 0.22_3 \cdot 3^3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right) \cdot 27 = 18 + 6 = 24$.Frage 2: Jetzt sind x und y **keine** Maschinenzahlen. Daher ist bedingt durch die Eingangsroundung die schlechte Kondition der Subtraktion möglich.

Frage 3: Man kann die Kondition nicht umgehen.

Beispiel:

 $f(x) = x^{1000}$, $x = 1 \rightarrow \tilde{x} = 1.0001$. Dieser Eingangsfehler von 0.01% wird (bei exakter Rechnung) zu einem Ausgabefehler von mehr als 10.5%Frage 4: Gegenbeispiel: $x = 101$, $y = 1$: $\rightarrow \kappa_{\text{rel}} = 1.01$, also gut konditioniert.Frage 5: Man rechnet leicht nach: $\kappa_{\text{rel}, x_1} = |x_1|$ und $\kappa_{\text{rel}, x_2} = 1$.Frage 6: Hier ist $\kappa_{\text{rel}}(x) = \left| -\frac{1}{(1+x)^2} x \right| / \left| \frac{1}{1+x} \right| = \left| \frac{x}{1+x} \right|$.Also $\kappa_{\text{rel}}(3) = 0.75$ und somit werden aus den 2% in der Eingabe in erster Näherung 1.5% = 0.015 in der Ausgabe.

Verständnisfragen VF-2

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

f Es sei \tilde{x} eine Annäherung der Lösung x und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum.

Es gilt $\|r\| \leq \kappa(A) \|\tilde{x} - x\|$, mit $\kappa(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$.

f Es existiert stets eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R , so dass $A = LR$ gilt.

w Falls A orthogonal ist, gilt $A^T A = I$.

w Es sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. $\|\cdot\|$. Es gilt $\kappa(AB) \leq \kappa(A) \kappa(B)$.

Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A .

Geben Sie $\|B\|_\infty$ an.

f Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei

die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

Es sei \tilde{x} eine Annäherung der Lösung x und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum.

Es gilt $\|r\| \leq \kappa(A) \|b - x\|$, mit $\kappa(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$.

Es existiert stets eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R , so dass $A = LR$ gilt.

Falls A orthogonal ist, gilt $A^T A = I$.

Es sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. $\|\cdot\|$. Es gilt $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$.

Es sei $B := DA$ die spaltenorientierte Matrix zu A .

Geben Sie $\|B\|_\infty$ an.

Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung

Frage 1: $\|r\| = \|b - A\tilde{x}\| = \|Ax - A\tilde{x}\| = \|A(x - \tilde{x})\| \leq \|A\| \cdot \|x - \tilde{x}\|$
 $\|A^{-1}\|$ kann sehr klein sein. Daher ist diese Aussage falsch.

Frage 2: Nicht ohne Pivotisierung: Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Frage 3: Definition von orthogonal.

Frage 4: $\kappa(AB) = \|AB\| \|(AB)^{-1}\|$

$$\left. \begin{aligned} \|AB\| &\leq \|A\| \|B\| \\ \|(AB)^{-1}\| &= \|B^{-1}A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \|A^{-1}\| \end{aligned} \right\} \text{Behauptung}$$

Frage 5: Zeilenäquilibrieren $d_{ii} = 1 / \sum_j |a_{ij}|$ ("in jeder Zeile")
 also so konzipiert, dass $\|DA\|_\infty = 1 = \|B\|_\infty$

Frage 6: A ist nicht einmal symmetrisch.

Verständnisfragen VF-2

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

f Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6} n^3$ Operationen (gem. Vorlesung/Buch).

f Pivotisierung verbessert die Kondition der Gauß-Elimination.

w Es sei $PA = LR$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt:

$$|\det A^{-1}| = \frac{1}{|\det(R)|}.$$

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\|A\|_1$. 8

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei

die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6}n^3$ Operationen (gem. Vorlesung/Buch).

Pivotisierung verbessert die Kondition der Gauß-Elimination.

Es sei $PA = LR$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt:

$$|\det A^{-1}| = \frac{1}{|\det(R)|}.$$

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\|A\|_1$.

Frage 1: Gauß/ LR -Zerlegung $\frac{1}{3}n^3$, $\frac{1}{6}n^3$ ist Cholesky/ LDL^T -Zerlegung

Frage 2: Pivotisierung stabilisiert (den Algorithmus)
Zusatz: äquilibrierung liefert eine Matrix mit i. A. besserer ∞ -Kondition.

Frage 3: Da $PA = LR$ gilt $\det P \cdot \det A = \det L \cdot \det R$ also

$$\pm \det A = \det R$$

Da aus $AA^{-1} = I$ zudem $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ folgt, gilt

$$|\det A^{-1}| = \frac{1}{|\det A|} = \frac{1}{|\det R|}$$

Frage 4: $\|\cdot\|_1$ Spaltensummennorm $\max\{6, 4, 8\} = 8$

Verständnisfragen VF-3

Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$ -Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung von A .

f Es gilt $\|A\|_2 = \|D\|_2$.

f Das Problem $Ax = b$ ist immer gut konditioniert.

w Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist ein stabiles Verfahren.

f Für die stabile Berechnung einer LR -Zerlegung $A = LR$ von A ist Pivottisierung notwendig.

Es sei Q eine orthogonale Matrix und $Q \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$.
Geben Sie $|c|$ an.

f Es gilt $A^{-1} = LD^{-1}L^T$.

Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$ -Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung von A . Es gilt $\|A\|_2 = \|D\|_2$. Das Problem $Ax = b$ ist immer gut konditioniert. Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist ein stabiles Verfahren. Für die stabile Berechnung einer LR -Zerlegung $A = LR$ von A ist Pivottisierung notwendig.Es sei Q eine orthogonale Matrix und $Q \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$.Geben Sie $|c|$ an. Es gilt $A^{-1} = L D^{-1} L^T$.Frage 1: Dazu müsste z. B. L orthogonal sein. (Also $\|L\| = \|I\|$). Gegenbeispiel:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = I, \quad LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ offenbar } \|I\|_1 \neq \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\|_1$$

Frage 2: Es gibt auch schlecht konditionierte "s.p.d." Probleme.
Beispielsweise Hilbert-Matrizen. (hier mit Shift)

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & \frac{1}{1001} \\ \frac{1}{1001} & \frac{1}{1002} \end{pmatrix}, \quad \kappa_2(H) = 42.1513$$

Frage 3: Cholesky ist von der Stabilität mit Skalierung und Pivottisierung bei nicht s.p.d. Matrizen vergleichbar. (Pivottisierung weder notwendig noch sinnvoll.)

Frage 4: Da A s.p.d., hier nicht erforderlich.Frage 5: Anwendung von Q ändert Länge nicht. $\rightarrow |c| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ Frage 6: $A = LDL^T \Rightarrow A^{-1} = L^{-T} D^{-1} L^{-1}$

Verständnisfragen VF-3

Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$ -Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung von A .

w Das Produkt zweier Givens-Rotations-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.

f Es seien $Q_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Householder-Transformations-Matrix und $x \in \mathbb{R}^m$ beliebig.
Es gilt $\|Q_v x\|_\infty = \|x\|_\infty$.

f Die Berechnung einer QR -Zerlegung $B = QR$ von $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix B vollen Spaltenrang hat.

Es sei Q_v eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix Q_v an.

Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$ -Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung von A .

Das Produkt zweier Givens-Rotations-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.

Es seien $Q_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Householder-Transformations-Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Es gilt $\|Q_n x\|_\infty = \|x\|_\infty$.

Die Berechnung einer QR -Zerlegung $B = QR$ von $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix B vollen Spaltenrang hat.

Es sei Q_n eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix Q_n an.

Frage 1: Das Produkt orthogonaler Matrizen ist orthogonal.

$$(Q_1 \ Q_2) (Q_1 \ Q_2)^T = Q_1 (Q_2 \ Q_2^T) Q_1^T = Q_1 Q_1^T = I$$

Frage 2: "falsche" Norm. Gilt nur für die 2-Norm.

Frage 3: Orthogonale Matrizen bilden auch für Matrizen mit Rangdefekt ein stabiles Verfahren zur Berechnung der QR -Zerlegung

Frage 4: $Qx = \lambda x$: für $\|\cdot\|_2$ gilt

$$\|x\|_2 = \|Qx\|_2 = |\lambda| \|x\|_2 \text{ also } |\lambda| = 1$$

Verständnisfragen VF-4

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$.
Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$
eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit
 $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es sei $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \in \mathbb{R}^n$.
Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen Ax^* und b .

w Je kleiner der Winkel Θ , desto kleiner ist die Größe $\frac{\|Ax^* - b\|_2}{\|b\|_2}$.

f Es gilt $\tilde{R}x^* = Q^T b$.

w Die Matrix \tilde{R} kann man über Givens-Rotationen bestimmen.

f Es gilt $\det \tilde{R} = \det A$.

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es sei $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen Ax^* und b .

Je kleiner der Winkel θ , desto kleiner ist die Größe $\frac{\|Ax^* - b\|_2}{\|b\|_2}$.

Es gilt $\tilde{R}x^* = Q^T b$.

Die Matrix \tilde{R} kann man über Givens-Rotationen bestimmen.

Es gilt $\det \tilde{R} = \det A$.

Frage 1: $\sin \theta = \frac{\|Ax^* - b\|_2}{\|b\|_2}$

Frage 2: "doppelt" falsch.

a) Dimensionen passen nicht $\tilde{R}x^* \in \mathbb{R}^n$, $Q^T b \in \mathbb{R}^m$

b) $QA = R$: Aber mit $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = Qb + \tilde{R}x^* = b_1$

Frage 3: Givens-Rotationen sind orthogonale Transformationen

Frage 4: $\det A$ ist überhaupt nicht definiert.

Verständnisfragen VF-4

Es seien $m = 4$, $n = 3$ und $Qb = (1, 0, 3, -4)^T$.

Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$.

w Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Qb\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.

f Durch eine geeignete Wahl des skalaren Parameters im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems wird die Konvergenzordnung der Methode in der Regel erhöht.

w Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.

f Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist immer maximal 1.

Es sei $\Theta = 0$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$.

Es seien $m = 4$, $n = 3$ und $Qb = (1, 0, 3, -4)^T$.Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$. Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Qb\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$. Durch eine geeignete Wahl des skalaren Parameters im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems wird die Konvergenzordnung der Methode in der Regel erhöht. Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen. Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist immer maximal 2.Es sei $\Theta = 0$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$.

Frage 1: Wie in der Antwort zur zweiten Frage dieses Abschnitts.

$$\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Qb\|_2. \quad Rx^* = b_1, \quad \|b_2\|_2 \text{ Residuum.}$$

Hier $b_2 = (-4)$.

Frage 2: Siehe Frage 1

Frage 3: Der Parameter dient zur Dämpfung der Korrektur. Ordnung bleibt. Konvergiert möglicherweise langsamer, dafür aber auch dann, wenn Gauß-Newton nicht konvergiert.

Frage 4: Formal $x^{k+1} = x^k - (F'(x^k)^T F'(x^k))^{-1} F'(x^k)^T x^k$

Frage 5: Kann auch höher sein.

Falls $\|F'(x^*)\| = 0$ mindestens 2 (lokal!)

Frage 6: Siehe erste Fragen in diesem Abschnitt

Verständnisfragen VF-5

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.

Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x .

Für $n = 1$ sei außerdem $\Phi_1(x) := \frac{1}{4}x^2 - 1$.

f Es gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.

f Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist maximal 2.

f Das Fixpunktproblem $\Phi_1(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in \mathbb{R} .

w Für Φ_1 sind auf dem Intervall $[-1, 0]$ alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Es seien $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.
 Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x .
 Für $x_1 = 1$ sei außerdem $\Phi_1(x) := \frac{1}{4}x^2 - 1$.

- Es gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.
- Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist maximal 2.
- Das Fixpunktproblem $\Phi_1(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in \mathbb{R} .
- Für Φ_1 sind auf dem Intervall $[-1, 0]$ alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Frage 1: Es gibt auch "abstoßende" Fixpunkte

Frage 2: $\Phi(x) = x^p$ hat Konvergenzordnung p , denn $x^* = 0$,

$$\Phi'(x^*) = \dots = \Phi^{(p-1)}(x^*) = 0$$

und

$$\Phi^{(p)}(x^*) = p! \neq 0.$$

Frage 3: $\Phi_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1 = x$ hat genau 2 Lösungen.

$$x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8}$$

Frage 4: Φ_1 ist auf $[-1, 0]$ monoton fallend, also $\Phi_1([-1, 0]) \in [-1, -\frac{3}{4}]$

$$\Phi_1'(x) = \frac{1}{2}x \text{ also } |\Phi_1'(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ auf } [-1, 0].$$

Verständnisfragen VF-5

Wir betrachten die Fixpunktiteration zur Bestimmung einer Lösung $x^* < 0$ des Fixpunktproblems $\Phi_1(x) = x$, mit einem Startwert x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* . Geben Sie die Konvergenzordnung dieser Methode an.

f Bei der Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion f , müssen die Startwerte x_0, x_1 so gewählt werden dass $f(x_0) f(x_1) < 0$ gilt.

w Es sei $f(x) = x^2 - 3$. Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.

f Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle kann man nur bei skalarwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anwenden.

Wir betrachten die Fixpunktiteration zur Bestimmung einer Lösung $x^* < 0$ des Fixpunktproblems $\Phi_1(x) = x$, mit einem Startwert x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* . Geben Sie die Konvergenzordnung dieser Methode an.

Bei der Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion f , müssen die Startwerte x_0, x_1 so gewählt werden dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.

Es sei $f(x) = x^2 - 3$. Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.

Eine Dämpfungstrategie beim Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle kann man nur bei skalarwertigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anwenden.

Frage 1: $\Phi'(x)$ hat nur $x = 0$ als Nullstelle $\Rightarrow \Phi'(x^*) \neq 0$
 \Rightarrow Konvergenzordnung maximal 1. Es folgt genau 1

Frage 2: Muss nicht sein. Man verliert den Einschluss ja auch (vorübergehend) während der Iteration

Frage 3:

$$x_0 \in [0, \sqrt{3}] \rightarrow x_1 < \sqrt{3}$$

$$x_0 > \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3} < x_{i+1} < x_0$$

Frage 4: Geht mehrdimensional genauso.

Verständnisfragen VF-5

f Es seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$.

Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton-Methode

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert.

Dann gilt: $|x^* - x_k| \approx (x_{k+1} - x_k)^2$ für k hinreichend groß.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$.

Wir betrachten das Fixpunktproblem auf dem Intervall $[0, 1]$.

Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante

$L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. 0.5

□ Es seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$.

Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton-Methode

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert.

Dann gilt: $|x^* - x_k| \approx (x_{k+1} - x_k)^2$ für k hinreichend groß.

Es seien $r_2 = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$.

Wir betrachten das Fixpunktproblem auf dem Intervall $[0, 1]$.

Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an.

Frage 1: Richtig wäre

$$|x^* - x_k| \approx |x_{k+1} - x_k|$$

oder

$$|x_{k+1} - x^*| \leq c |x_k - x^*|^2.$$

Frage 2: $[0, 1]$ wird durch $e^{-\frac{1}{2}x}$ auf $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$ abgebildet.

$$\Phi'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \rightarrow |\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2} = 0.5 \text{ auf } [0, 1]$$

Verständnisfragen VF-6

Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Weiter sei $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

f Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = (x - x_n)[x_0, \dots, x_n]f + P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x)$.

w Es sei Π_n der Raum der reellen Polynome vom Grad maximal n . Die Knotenpolynome $\omega_k(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, $\omega_0(x) := 1$, bilden eine Basis des Raumes Π_n .

w Die Auswertung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem (Auswertung) bezüglich der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.

w Der Fehler $\max_{x \in [a, b]} |P(f | x_0, \dots, x_n) - f(x)|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$. $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$ ist gleich **0**

Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n = b$.

Weiter sei $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = (x - x_n)[x_0, \dots, x_{n-1}]f + P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x)$.

Es sei Π_n der Raum der reellen Polynome vom Grad maximal n . Die Knotenpolynome $\omega_k(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, $\omega_0(x) := 1$, bilden eine Basis des Raumes Π_n .

Die Auswertung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem (Auswertung) bezüglich der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.

Der Fehler $\max_{x \in [a, b]} |P(f | x_0, \dots, x_n) - f(x)|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$. $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$ ist gleich

Frage 1: a) Polynomgrad nur $n - 1$
 b) $(x - x_n) \Rightarrow \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$

Frage 2: Das ist die Newtonsche Basis

Frage 3: Beispiel Kondition bzgl. a_0 .

$$\frac{\partial P(x)}{\partial a_0} = 1 \Rightarrow \kappa_{rel, a_0} = \left| \frac{a_0}{P(x)} \right|$$

a_0 ist groß, $|P(x)|$ klein, daher ist κ_{rel, a_0} groß.

Frage 4: Wir hatten z. B. das Beispiel von Runge und

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i). \text{ Abh\u00e4ngig von } x_i.$$

Frage 5: $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$ ist der führende Koeffizient von $P(f | x_0, \dots, x_3)$, d.h. der Koeffizient von x^4 , also 0.

Verständnisfragen VF-6

Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_{m,n}(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$, $h = (b - a)/n$.

w Es sei $I_2(f)$ die Simpson-Regel.

Dann gilt $|I_{2,n}(f) - I(f)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

w Es gilt $I_m(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal m .

f Es gilt $I_{1,n}(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal n .

f Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Intervall $[a, b]$ ab.

Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^5 dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel $I_{1,2}(f)$. 17

Es sei $f \in C^4[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Newton-Cotes-Formel $I_n(f) = (b-a) \sum_{j=0}^{n-1} w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \dots < x_{n-1} \leq b$. Weiter sei $I_{n,n}(f)$ die aus $I_n(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$, mit $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$, $h = (b-a)/n$.

Es sei $I_2(f)$ die Simpson-Regel.
Dann gilt $|I_{2,n}(f) - I(f)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt $I_n(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal n .

Es gilt $I_{1,n}(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal n .

Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Intervall $[a, b]$ ab.
Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^3 dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel $I_{1,2}(f)$.

Frage 1: Stetigkeit reicht bereits für die Konvergenz der summierten Regeln. Mit $f \in C^4[a, b]$ hätten wir hier sogar $\mathcal{O}(h^4)$, $h = (b-a)/n$

Frage 2: Der Exaktheitsgrad von Newton-Cotes-Formeln ist m oder $m+1$, also ist m immer OK.

Frage 3: Summation ändert **nicht** den Exaktheitsgrad

Frage 4: Weil wir die Darstellung $h \sum_i w_i f(x_i)$ wählen, sind die Gewichte nicht intervallabhängig.

Frage 5: $\frac{1}{2}(0^5 + 2 \cdot 1^5 + 2^5) = \frac{34}{2} = 17$