Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19
Verständnisfragen – Übung 2

Die Lösungen der Verständnisfragen sollten nicht auswendig gelernt werden. Es ist wichtig zu verstehen und begründen zu können, warum die entsprechenden Aussagen richtig oder falsch sind.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := fl(fl(x) - fl(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Es existiert ein $x \in \mathbb{D}$, so dass $\frac{\lvert \mathrm{fl}(x) - x \rvert}{\lvert x \rvert} = \text{eps}$.	
2.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	
3.	Die Zahl 17 ist in $\mathbb{M}(2, 6, -4, 4)$ exakt darstellbar.	
4.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.	
5.	Es gilt $\frac{\lvert (x \ominus y) - (x - y) \rvert}{\lvert x - y \rvert} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$ mit $x \neq y$.	
6.	Es gilt $\frac{\lvert (x \ominus y) - (x - y) \rvert}{\lvert x - y \rvert} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$ mit $x \neq y$.	
7.	Berechne x_{MAX} für $\mathbb{M}(3, 2, -1, 4)$.	

VF-2: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\mathrm{MAX}}, -x_{\mathrm{MIN}}] \cup [x_{\mathrm{MIN}}, x_{\mathrm{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	In $\mathbb{M}(10, 8, -2, 4)$ gilt: $x_{\mathrm{MIN}} = 0.001$.	
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq$ eps und $\mathrm{fl}(x) = x + \epsilon$.	
3.	Es gilt $\left\lvert \frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x} \right\rvert \leq$ eps für alle $x \in \mathbb{D}$.	
4.	Die Zahl 256 ist in $\mathbb{M}(2, 4, -6, 6)$ exakt darstellbar.	
5.	Es gilt $\lvert\mathrm{fl}(x + y)\rvert \leq \lvert\mathrm{fl}(x)\rvert + \lvert\mathrm{fl}(y)\rvert$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$.	
6.	Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ist gut konditioniert für alle $x \in (-1, 1)$.	
7.	Gib die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 93 in $\mathbb{M}(5, 8, -8, 8)$ an.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$, und $\kappa_2(A)$ bezeichne die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch.		
1.	$\kappa_2(A) \geq 1$.	
2.	$\kappa_2(\alpha A) = \kappa_2(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.	
3.	$\kappa_2(A^{-1}) = \kappa_2(A)^{-1}$.	
4.	$\kappa_2(A) = 1$ falls A orthogonal ist.	
5.	Berechne $\kappa_2(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.	