

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19

Verständnisfragen – Hausübung 5

VF-1: Es seien $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf \mathbb{R}^n und $\|\cdot\|$ die zugehörige Matrix-Norm. Weiter seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\ A^k\ \leq \ A\ ^k$ ($k \in \mathbb{N}$).	
2.	Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\ A^{-1}\ \geq \frac{1}{\ A\ }$	
3.	Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\ A^{-1}\ = \frac{1}{\inf_{\ x\ =1} \ Ax\ }$	
4.	$\forall x \in \mathbb{R}^n : \ Ax\ = \ A\ \ x\ $	
5.	$\ AB\ \leq \ A\ \cdot \ B\ $	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{i,i} > 0$, $i = 1, \dots, n$.

1.	Falls eine Zerlegung $A = LDL^T$ existiert, dann ist A symmetrisch positiv definit.	
2.	Für jede invertierbare Matrix A existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.	
3.	Für jede symmetrische Matrix A existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.	
4.	Die Matrix LDL^T ist invertierbar.	
5.	Es seien $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $A = LDL^T$. Berechne $\det(A)$.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix.

1.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	
2.	Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
3.	Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^n d_{i,i}$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.	
4.	Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	
5.	Bei bekannter Zerlegung $A = LDL^T$ beträgt der Aufwand zum Lösen von $Ax = b$ ungefähr αn^p . Gib p an.	

VF-4: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und κ_2 bezeichne die Kondition bzgl. der $\|\cdot\|_2$ -Norm.

1.	$Q^T Q = Q Q^T = I$.	
2.	$ \det(Q) = \ Q\ _2 = \ Q^T\ _2 = \ Q^{-1}\ _2 = \kappa_2(Q) = \kappa_2(Q^T) = \kappa_2(Q^{-1}) = 1$.	
3.	$\ Qx\ _2 = \ x\ _2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$.	
4.	$\ QA\ _2 = \ A\ _2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.	
5.	$\kappa_2(QA) = \kappa_2(AQ) = \kappa_2(A) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.	
6.	Es seien $m = 2$ und $x = (3, 4)^T$. Berechne $\ Qx\ _2$.	