Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19
Verständnisfragen – Übung 5

VF-1: Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix.		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine $L\,D\,L^T$–Zerlegung mit $A = LDL^T$.	
2.	Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine $L\,D\,L^T$–Zerlegung mit $A = L\,D\,L^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
3.	Nur mithilfe einer zusätzlichen Pivotisierung kann man garantieren, dass beim Cholesky-Algorithmus keine Division durch Null auftritt.	
4.	Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ finden.	
5.	Ist A regulär und symmetrisch, so existiert stets eine $L\,D\,L^T$–Zerlegung, so dass $A = L\,D\,L^T$ gilt.	
6.	Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.	
7.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ die $L\,D\,L^T$-Zerlegung von A mit einer Diagonalmatrix D, für die $\det(D) > 0$ gilt. Dann ist A symmetrisch positiv definit.	
8.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung der positiv definiten Matrix A. Dann ist $A^{-1} = L^{-T}D^{-1}L^{-1}$ die Cholesky-Zerlegung der Matrix A^{-1}.	
9.	Es seien $n = 4$ und $A = L\,D\,L^T$ die $L\,D\,L^T$-Zerlegung von A mit einer Diagonalmatrix D, für die $d_{ii} = i$ $(i = 1, \dots, 4)$ gilt. Berechne $\det(A)$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
2.	Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
3.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
4.	Die Skalierung von A benötigt $\mathcal{O}(n^2)$ Ops	
5.	Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $\alpha\,n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops. Gib α an.	

VF-3: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale (quadratische) Matrizen, d.h. $A^T A = I$ und $B^T B = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Weiter bezeichne $\|.\|_2$ die Euklidische Vektor- / Matrixnorm und κ_2 die zugehörige Konditionszahl. Welche der folgenden Aussagen sind immer korrekt?

1.	A^T ist orthogonal	
2.	$A\,A^T = I$	
3.	A ist nicht symmetrisch	
4.	A ist symmetrisch	
5.	$A\,B$ ist eine orthogonale Matrix	
6.	$A + B$ ist eine orthogonale Matrix	
7.	Die Spalten von A sind paarweise orthogonal	
8.	Die Zeilen von A sind paarweise orthogonal	
9.	Alle Zeilen und Spalten von A haben die Euklidische Länge 1	
10.	$\|A\,x\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$	
11.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $Q^2 = I$.	
12.	Gib $\kappa_2(A)$ an.	