Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19
Verständnisfragen – Hausübung 6

VF-1: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q\,R = A$ eine Zerlegung von A mit Q orthogonal und R eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$A\,x = b \Leftrightarrow R\,x = Q^T b$	
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\,\kappa_2(R)$	
3.	Zur Lösung von $A\,x = b$ über die QR-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.	
4.	$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(R)$	
5.	Gib das kleinste β an, für das die Ungleichung $\|Q\,x\|_2 \le \beta\,\|x\|_2$ allgemein gültig ist.	

VF-2: Es seien $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine (elementare) Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q = I - \frac{v\,v^T}{v^T v}$.	
2.	Es gilt stets $Q = Q^T$.	
3.	Zu jedem $(n-1)$-dimensionalen Unteraum U des $\mathbb{R}^n$ existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, sodass $\forall\, y \in U$ gilt $Q\,y = y$.	
4.	Q hat einen einfachen Eigenwert -1 und einen $(n-1)$-fachen Eigenwert $+1$.	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um A mit Householdertransformationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa $\alpha\,n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib p an.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	
2.	Das Householder-Verfahren zur Berechnung einer $Q\,R$-Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung nicht stabil.	
3.	Die einzelnen Schritte des Givens-Algorithmus zur $Q\,R$-Zerlegung von A lassen sich geometrisch als Drehungen interpretieren.	
4.	Eine Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um A mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa $\alpha\,n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib p an.	
6.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um A mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa $\alpha\,n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib α an.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ (die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$).

Zusatz: Überlege bei 2., 3. und 4. auch was sich ändert, wenn $Q\,A = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$, $A = Q\,R = Q \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$ bzw. $A = Q \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ ist.

1.	Es gilt $\|A\,x^* - b\|_2 = \min \Leftrightarrow A^T\,(A\,x^* - b) = 0$.	
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Es sei $Q\,b =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n,\ b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1} b_1$.	
4.	Die Matrix R kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	
5.	Es sei $Q\,A = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ die $Q\,R$-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme $\|r\|$.	