

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19

## Verständnisfragen – Hausübung 6

<b>VF-1:</b> Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $QR = A$ eine Zerlegung von $A$ mit $Q$ orthogonal und $R$ eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$	wahr
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1}) \kappa_2(R)$	wahr
3.	Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss $Q$ explizit bestimmt werden.	falsch
4.	$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(R)$	wahr
5.	Gib das kleinste $\beta$ an, für das die Ungleichung $\ Qx\ _2 \leq \beta \ x\ _2$ allgemein gültig ist.	<b>1</b>

<b>VF-2:</b> Es seien $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine (elementare) Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$ , so dass $Q = I - \frac{vv^T}{v^T v}$ .	falsch
2.	Es gilt stets $Q = Q^T$ .	wahr
3.	Zu jedem $(n-1)$ -dimensionalen Unterraum $U$ des $\mathbb{R}^n$ existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$ , sodass $\forall y \in U$ gilt $Qy = y$ .	wahr
4.	$Q$ hat einen einfachen Eigenwert $-1$ und einen $(n-1)$ -fachen Eigenwert $+1$ .	wahr
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um $A$ mit Householdertransformationen in eine obere Dreiecksmatrix $R$ zu überführen benötigt man etwa $\alpha n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib $p$ an.	<b>3</b>

<b>VF-3:</b> Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	falsch
2.	Das Householder-Verfahren zur Berechnung einer $QR$ -Zerlegung von $A$ ist ohne Pivotisierung nicht stabil.	falsch
3.	Die einzelnen Schritte des Givens-Algorithmus zur $QR$ -Zerlegung von $A$ lassen sich geometrisch als Drehungen interpretieren.	wahr
4.	Eine Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.	falsch
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um $A$ mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix $R$ zu überführen benötigt man etwa $\alpha n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib $p$ an.	<b>3</b>
6.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um $A$ mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix $R$ zu überführen benötigt man etwa $\alpha n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib $\alpha$ an.	<b>1.3333</b>

**VF-4:** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , mit  $\text{Rang}(A) = n \leq m$ , und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Weiter seien  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  eine orthogonale Matrix und  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine obere Dreiecksmatrix so, dass  $QA = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$  gilt. Weiter sei  $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$  (die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ ).

**Zusatz:** Überlege bei 2., 3. und 4. auch was sich ändert, wenn  $QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$ ,  $A = QR = Q \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$  bzw.

$A = Q \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$  ist.

1.	Es gilt $\ Ax^* - b\ _2 = \min \Leftrightarrow A^T(Ax^* - b) = 0$ .	wahr
2.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ .	falsch
3.	Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ , $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$ .	wahr
4.	Die Matrix $R$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	wahr
5.	Es sei $QA = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ die $QR$ -Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Bestimme $ r $ .	<b>5</b>