Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19
Verständnisfragen – Hausübung 7

VF-1: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $m^2\, n$.	
2.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $n^2\, m$.	
3.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen.	
4.	Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der $L\,D\,L^T$-Zerlegung ungefähr halb soviele Operationen benötigt wie das bei einer $L\,R$-Zerlegung.	
5.	Zur Berechnung der $L\,D\,L^T$-Zerlegung von $A^T A$ benötigt man etwa $\alpha\, n^p$ Operationen. Gib α an.	

VF-2: Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n und die Cholesky-Zerlegung $A^T\,A = L\,D\,L^T$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Es gilt $L^T x^* = D^{-1} y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = b$ ist.	
2.	Die Normalgleichungen lassen sich immer mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung lösen.	
3.	Wenn die Spalten von A orthonormal sind, dann ist x^* auch die Lösung von $\|x - A^T\, b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$.	
4.	Es gilt stets $\|LDL^T x^* - A^T b\|_2 = 0$.	
5.	Zur Berechnung der $L\,D\,L^T$-Zerlegung von $A^T A$ benötigt man etwa $\alpha\, n^p$ Operationen. Gib p an.	

VF-3: Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung des Ausgleichsproblems immer ungeeignet.	
2.	Die Normalgleichungen lassen sich mit dem Cholesky-Verfahren lösen, nicht aber mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung.	
3.	Mit der Cholesky-Zerlegung $A^T A = LDL^T$ gilt stets $L^T x^* = D^{-1} y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = A^T b$ ist.	
4.	Es gilt stets $\|Ax^* - b\|_2 = \|LDL^T x^* - A^T b\|_2$.	
5.	Für welche α ist die Matrix $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha \end{pmatrix}$ orthogonal?	

VF-4: Mit mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ gelöst werden. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Normalgleichungen tragen ihren Namen, weil das damit berechnete Residuum senkrecht auf b steht.	
2.	Wenn man die Normalgleichungen statt mit Cholesky-Verfahren mit einer $Q\,R$-Zerlegung von $A^T\,A$ löst, dann bekommt man die selbe Genauigkeit in x^* wie bei der Lösung mittels $Q\,R$-Zerlegung von A.	
3.	Im Gegensatz zu Givens-Rotationen lässt sich mit Householder-Spiegelungen das Residuum $\|Ax-b\|_2$ nicht direkt aus dem transformierten System ablesen, sondern man muss erst $Ax-b$ explizit ausrechnen.	
4.	Bei der Verwendung einer QR-Transformation (Givens/Householder) muss die Matrix Q nicht explizit aufgestellt werden, um die Lösung x zu erhalten.	
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} \cos(0.5) & \sin(0.5) \\ -\sin(0.5) & \cos(0.5) \end{pmatrix}$. Berechne $\|A\|_2$.	

VF-5: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit vollem Rang und $m > n$, eine $Q\,R$-Zerlegung $A = QR$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Es seien $Q^T A = R := \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{(m-n)}$. Weiter sei $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ (die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichproblems).		
1.	Es gilt $\det R \neq 0$.	
2.	Das Residuum des zugehörigen linearen Ausgleichproblems ist $\|b_1\|_2$.	
3.	Es gilt $\|Ax-b\|_2 = \|Rx - Q^T b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
4.	Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist gegeben durch $x^* = R^{-1}Q^T b$.	
5.	Es seien $Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$. Berechne $\kappa_2(A)$.	

VF-6: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 0.1 + \frac{1}{2}\sin(x)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 0]$ erfüllt.	
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.	
3.	Das Problem $x = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, hat eine eindeutige Lösung.	
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.	
5.	Berechne x_2 zu $x_0 = 0$.	