# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19
# Verständnisfragen – Hausübung 8

**VF-1:** Mit $k \in \mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k \in \mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen $x^*$, wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \le c\|x_k - x^*\|^p$ für alle $k \ge k_0$ gilt. | |
| 2. | Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen $x^*$, wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \le c\|x_k - x^*\|$ für alle $k \ge k_0$ gilt. | |
| 3. | Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \to \infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor $p$ vergrößert. | |
| 4. | Je größer die Konvergenzordnung $p$ ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$. | |
| 5. | Es seien nun zusätzlich $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $\Phi$ und $\Phi'(x^*) = 0$. Dann ist die Konvergenzordnung mindestens $p$. Gib $p$ an. | |

**VF-2:** Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $|\Phi'(x^*)| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein ist. | |
| 2. | Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein. | |
| 3. | Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1. | |
| 4. | Für $\Phi(x) = 5\arctan(x) + 8$ konvergiert das Fixpunktverfahren für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von $\Phi$ in $\mathbb{R}$. | |
| 5. | Es sei wieder $\Phi(x) = 5\arctan(x) + 8$. Gib für das Interval $[8, 200]$ die bestmögliche Kontraktionszahl $L$ an. | |

**VF-3:** Es seien $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x^\star$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Falls $\|\Phi'(x^\star)\| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte $x_0$ mit $\|x_0 - x^\star\|$ hinreichend klein. | |
| 2. | Falls $\|\Phi'(x^\star)\| > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^\star$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$ . | |
| 3. | Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1. | |
| 4. | Falls $\Phi'(x^\star) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte $x_0$ mit $\|x_0 - x^\star\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1. | |

**VF-4:** Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \neq -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung. | |
| 2. | Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für $\Phi$ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt. | |
| 3. | Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für $\Phi$ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ erfüllt. | |
| 4. | Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > 0$. | |
| 5. | Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > \frac{1}{2}$ mit der Konvergenzordnung $p$. Gib $p$ an.. | |

| **VF-5:** Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 0.1 + \frac{1}{2}\sin(x)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. | | |
|---|---|---|
| 1. | Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für $\Phi$ auf dem Intervall $[-1, 0]$ erfüllt. | |
| 2. | Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für $\Phi$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt. | |
| 3. | Das Problem $x = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, hat eine eindeutige Lösung. | |
| 4. | Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$. | |
| 5. | Berechne $x_2$ zu $x_0 = 0$. | |

| **VF-6:** Sei $x^*$ eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{x^2} - 4$. | | |
|---|---|---|
| 1. | $f$ hat eine eindeutige Nullstelle $x^*$. | |
| 2. | Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, konvergiert gegen eine Nullstelle $x^*$. | |
| 3. | Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle $x^*$. | |
| 4. | Das Newton-Verfahren, angewandt auf $f$, konvergiert für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ gegen eine Nullstelle $x^*$. | |
| 5. | Zur Lösung des Nullstellenproblems von $f$ wird Newton-Verfahren angewandt mit dem Startwert $x_0 = 1$. Geben Sie $x_1$ an. | |

| **VF-7:** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^*$ eine Lösung des Nullstellenproblems $f(x) = 0$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung $f'$ (Jacobi-Matrix) nicht. | |
| 2. | Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so konvergiert das Newton-Verfahren für alle Startwerte die hinreichend nahe bei $x^*$ liegen, und die Konvergenzordnung ist 2. | |
| 3. | Das Sekantenverfahren erlaubt nur die Dimension $n = 1$. | |
| 4. | Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren gewährleistet für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens. | |
| 5. | Es seien $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$ und $\{x_k, k = 0, 1, ...\}$ die durch das Newton-Verfahren induzierte Folge. Bestimmen Sie $x_2$. | |

| **VF-8:** Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
|---|---|---|
| 1. | Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann existiert in [a, b] genau eine Nullstelle von $f$. | |
| 2. | Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte $x_i$ des Newton-Verfahrens $x_i \geq a$. | |
| 3. | Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge. | |
| 4. | Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert. | |