Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Übung 9

VF-1: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$. Wir betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von x^*:

$$x_0 \in U, \qquad x_{k+1} = x_k - \left(f'(x_k)\right)^{-1} f(x_k) \quad \text{für } k \geq 0.$$

Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	Die Newton-Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.	
2.	Die Newton-Methode ist nur lokal quadratisch konvergent, falls man die Berechnung von $\left(f'(x_k)\right)^{-1}$ vermeidet.	
3.	Wenn $f'(x)$ für alle $x \in U$ regulär ist und das Newton-Verfahren konvergiert, dann gilt für genügend große k's : $\lvert\lvert x_k - x^*\rvert\rvert \approx \lvert\lvert x_k - x_{k+1}\rvert\rvert$.	
4.	Die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens kann durch Verwendung orthogonaler Transformationen zur Lösung des auftretenden Gleichungssystems beschleunigt werden.	
5.	Es seien $f'(x)$ für alle $x \in U$ regulär und das gedämpfte Newton-Verfahren mit konstantem $\lambda = 0.8$ konvergiere gegen die Nullstelle $x^\star$. Gib die (lokale) Konvergenzordnung p für diesen Fall an.	

VF-2: Es sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\,x + 3\,x^2 - x^3$.

1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $(-\infty, 0]$.	
2.	Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von $x^* < 0$, und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Es gilt $\lvert x_k - x^*\rvert \approx (x_k - x_{k+1})^2$ für k hinreichend groß.	
3.	Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \leq 0$ gegen eine Nullstelle.	
4.	Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert das Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 3$?	
5.	Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [0.5, 1.5]$ gegen die eindeutige Nullstelle in $[0.5, 1.5]$.	
6.	Mit welcher Konvergenzordnung konvergiert das Newton-Verfahren mindestens für den Startwert $x_0 = 0.5$?	