

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19

## Verständnisfragen – Hausübung 10

<b>VF-1:</b> Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit $m > n$ . Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ . Wir nehmen an, dass $\text{Rang}(F'(x)) = n$ für alle $x$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.	falsch
2.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen quadratisch.	falsch
3.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen nicht schneller als linear.	wahr
4.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren hat den Zweck, die Konvergenzgeschwindigkeit der Gauß-Newton Methode zu beschleunigen.	falsch
5.	Sei nun $F(x, y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2xy-3 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$ . Wir betrachten $\ F(x, y)\ _2 \rightarrow \min$ . Bestime für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ $(x_1, y_1)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib $x_1$ an.	<b>0.5</b>
<b>VF-2:</b> Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ hinreichend oft differenzierbar mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(x^*)\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ . Sei $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ .	falsch
2.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$ .	wahr
3.	$\nabla \phi(x^*) = 0$ .	wahr
4.	Die Aufgabe $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$ ist einfacher zu lösen als die Aufgabe $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ .	falsch
5.	Sei nun $F(x, y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ (2y-3)^2 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$ . Wir betrachten $\ F(x, y)\ _2 \rightarrow \min$ . Bestime für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ $(x_1, y_1)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib $y_1$ an.	<b>0.7451</b>
<b>VF-3:</b> Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ . Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ . Wir nehmen an, dass $\text{Rang } F'(x) = n$ für alle $x$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ein Gauß-Newton-Verfahren kann mit einer Dämpfungsstrategie kombiniert werden.	wahr
2.	Lokale Maxima oder Sattelpunkte der Funktion $x \mapsto \ F(x)\ _2^2$ sind für das Gauß-Newton-Verfahren immer abstoßend.	wahr
3.	Lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahren in einer Umgebung eines (lokalen) Minimums $x^*$ ist gesichert, falls $\ F(x^*)\ _2$ hinreichend klein ist und alle Komponenten von $F''(x)$ beschränkt sind.	wahr
4.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenzordnung der Methode im Allgemeinen genau 1.	wahr
5.	Es seien $m = 2$ und $n = 1$ sowie $F(x) = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 6x-4 \end{pmatrix}$ . Gib $\ F(x^*)\ _2^2$ an.	<b>0.1</b>

**VF-4:** Es sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit  $m > n$ . Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme  $x^* \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur  $s^k$  durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ( $\mu > 0$  ein zu wählender Parameter):

1.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F'(x^k)s^k + F(x^k)\ _2 + \mu\ s^k\ _2 = \min$	falsch
2.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F'(x^k)s^k + F(x^k)\ _2^2 + \mu^2\ s^k\ _2^2 = \min$	wahr
3.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\  \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\ _2 = \min$	wahr
4.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\  \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\ _2 = \min$	falsch
5.	Es seien $m = 2$ , $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} (x - \frac{1}{3})^2 \\ 6x - 2 \end{pmatrix}$ . Gib $x^*$ an.	<b>0.33333</b>