Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19
Verständnisfragen – Hausübung 11

VF-1: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\{1,\, x,\, x^2, \ldots, x^n\}$ bildet eine Basis von Π_n.	
2.	$\{\alpha_0,\, \alpha_1 x,\, \alpha_2 x^2, \ldots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
3.	$\left\{1,\, x-\alpha_1,\, (x-\alpha_1)(x-\alpha_2),\, \ldots,\, \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)\right\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Der Raum Π_n hat die Dimension n.	
5.	Π_7 hat die Dimension k. Gib k an.	

VF-2: Sei $P(f\|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Seien l_{jn} die Lagrangeschen Fundamentalpoynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.	
2.	$P(f\|x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad n mit $a_n \neq 0$.	
3.	Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.	
4.	$P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.	
5.	Gegeben sei die Wertetabelle $\begin{array}{c\|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & -1 & 5 & 27 \end{array}$ einer Funktion f. Berechne $P(f\|x_0, x_1, x_2, x_3)(2)$.	

VF-3: Es sei $P(f\|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.		
1.	$P(\Psi\|x_0, \ldots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome Ψ.	
2.	Für beliebige f ist $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.	
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen f gilt: $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.	
4.	Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} \|P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ wird mit wachsendem n immer kleiner.	
5.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.	
6.	Gegeben sei die Wertetabelle $\begin{array}{c\|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & 3 & 5 & 7 \end{array}$ einer Funktion f. Berechne $P(f\|x_0, x_1, x_2, x_3)(2.5)$.	

VF-4: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, und $x, x^* \in [x_0, x_n]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	$P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	
2.	$P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	
3.	$P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}\left(n^2\right)$	
5.	Es seien $f(x) = \ln(x) + 2\,x^2$ und $x_0 = 0.5,\ x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$. Bestimme $P(f\|x_0,\, x_1,\, x_2)(1)$.	