

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19

Verständnisfragen – Übung 11

VF-1: Es seien x_0, \dots, x_n paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	Der Wert $[x_0, x_1, \dots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) ω_j gilt: $[x_0, \dots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \dots, n$.
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und n^2 Subtraktionen.
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.
5.	Der Aufwand zur Auswertung des Newtonschen-Interpolationspolynoms mit dem Horner Schema beträgt etwa αn^p Operationen. Gib p an.

VF-2: Es sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$. Weiter sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .	
1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \dots, x_n]f$.
2.	Es gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n! \delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
3.	$[x_0, x_1]f = f(x_1) - f(x_0)$.
4.	Mit $f(x) := 2x^4$ gilt $[x_0, \dots, x_n]f = 2$ für alle $n \geq 4$.
5.	Berechne $[0, 1, 2, 3](5x^3 + x - 5)$.

VF-3: Es sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Weiter sei $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .	
1.	Es gilt $P(Q x_0, \dots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n .
2.	Es gilt $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = P(f x_{n-1}, \dots, x_0)(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})[x_0, \dots, x_n]f$.
3.	Es sei $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$. Dann gilt $a_n = [x_0, \dots, x_n]f$.
4.	Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n . Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n .
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 4$. Berechne $P(f x_0, x_1)(\frac{7}{4})$.