

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19

Verständnisfragen – Übung 12

VF-1: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n . Ferner seien $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$, $0 \leq j \leq n$ die Lagrange-Fundamentalpolynome und $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.

1.	Die $l_{jn}(x)$, $0 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von Π_n .	
2.	Die Lagrange-Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}$, $i, j = 0, \dots, n$.	
3.	$\{a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n\}$ bildet für beliebige Faktoren $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n .	
4.	Für ein festes \bar{x} ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n^p)$. Gib p an.	
5.	Es seien $n = 2$, $x_0 = 7$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Berechne $l_{02}(4)$.	

VF-2: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

1.	Es sei $f(x) = x^2 + 2$. Dann gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3]f = 0$.	
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) = \delta_n(x - x_n) \dots (x - x_0) + P(f \mid x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ für alle x .	
3.	Für $i = 0, 1, \dots, n$ seien x_i und y_i mit $x_i \neq x_j$ und $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$ gegeben. Dann gilt für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen $f : [x_0, x_1, \dots, x_n]f = [y_0, y_1, \dots, y_n]f$.	
4.	Für $i = 0, 1, \dots, n$ seien x_i und y_i mit $x_i \neq x_j$ und $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$ gegeben. Dann gilt für alle Polynome $\Psi : [x_0, x_1, \dots, x_n]\Psi = [y_0, y_1, \dots, y_n]\Psi$.	
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ sowie $f(1) = -1$, $f(2) = -2$ und $f(4) = 2$. Berechne $P(f \mid x_0, x_1, x_2)(3)$.	

VF-3: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch durch eine Quadraturformel approximiert werden.

1.	Die absolute Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	
2.	Die relative Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	
3.	Die Trapezregel beruht auf der linearen Interpolation an den Intervallenden und anschließender Integration.	
4.	Es sei f eine auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbare, konvexe Funktion. Dann ist der mit der Trapezregel bestimmte Näherungswert immer größer als der tatsächliche Integralwert.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^4 e^x$ mit Hilfe der Trapezregel.	