Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19
Verständnisfragen – Hausübung 13

VF-1: Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$ approximiert.		
1.	$I_m(f) = \int_a^b P(f\|x_0,\ldots,x_m)dx$ wobei $P(f\|x_0,\ldots,x_m)$ das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_m$ ist.	
2.	$I_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_m$.	
3.	Falls $f \in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt für den Fehler $\|I(f) - I_m(f)\| \leq \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x\in[a,b]} \left\|f^{(m+1)}(x)\right\|$.	
4.	Es sei $I_m^n(f)$ die zu $I_m(f)$ gehörige summierte Regel mit $h = \frac{b-a}{n}$. Falls m gerade ist und $f \in C^{m+2}[a,b]$, dann verhält sich der Fehler $\|I(f) - I_m^n(f)\|$ für $n \to \infty$ wie $\mathcal{O}(h^{m+2})$.	
5.	Bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung kann Auslöschung auftreten (instabil).	
6.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel (I_0).	
7.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx$ mit Hilfe der Trapezsregel (I_1).	
8.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx$ mit Hilfe der Simpson-Regel (I_2).	

VF-2: Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \leq x_0 < \ldots < x_m \leq d$.		
1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen x_j.	
2.	Bei allen Newton-Cotes-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j nicht von der Funktion f ab.	
3.	Die Newton-Cotes-Formeln sind stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade $\leq m+1$ ist.	
4.	Die Gewichte c_j sind bei Newton-Cotes-Quadraturformeln immer alle positiv.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx$ mit Hilfe der summierten Mittelpunktsregel für $n = 2$ (I_0^2).	
6.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx$ mit Hilfe der summierten Trapezsregel für $n = 2$ (I_1^2).	
7.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx$ mit Hilfe der summierten Simpson-Regel für $n = 2$ (I_2^2).	
8.	Berechne $\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx$ *exakt.*	

VF-3: Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch durch eine Gauß-Quadraturformel $G_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m \omega_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$ approximiert werden.		
1.	Die Gewicht ω_j können für große m auch negativ werden.	
2.	Es sei $m = 1$. Die Gauß-Quadratur hat dann die Gewichte $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$.	
3.	Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.	
4.	$G_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^6 2^x$ mit Hilfe der Simpson-Regel.	

VF-4: Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.		
1.	Die absolute Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grade 4.	
3.	Bei der Gauß-Quadratur hängen die Gewichte w_j von der Funktion f ab.	
4.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f, wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Fehler minimal wird.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^4 e^x$ mit Hilfe der Miittelpunktsregel.	

VF-5: Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.		
1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f, wobei die Stützstellen äquidistant gewählt werden.	
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(x^3) = I(x^3)$.	
3.	Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Interval $[a,b]$ ab.	
4.	Seien $Q_m^{NC}(f)$ und $Q_m^G(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $Q_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $Q_m^G(f)$.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_1^7 x^2$ mit Hilfe der Simpsonregel.	

VF-6: Es sei $f \in C^\infty([a,b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Weiter seien $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$ und $I_m^n(f)$ die zugehörige summierte Formel .		
1.	Die relative Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	
2.	Bei der Gauß-Quadratur und bei den Newton-Cotes Formeln sind die Gewichte w_j unabhängig von der Funktion f.	
3.	Die Gauß-Quadratur basiert auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f, wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Exaktheitgrad von I_m maximal wird.	
4.	Für die Newton-Cotes Formeln gilt $\lim_{m\to\infty} \lvert I_m(f) - I(f)\rvert = 0$.	
5.	Für die Gauß-Formeln gilt $\lim_{m\to\infty} \lvert I_m(f) - I(f)\rvert = 0$.	
6.	Für die summierten Newton-Cotes Formeln gilt $\lim_{n\to\infty} \lvert I_m^n(f) - I(f)\rvert = 0$.	
7.	Für die summierten Gauß-Formeln gilt $\lim_{n\to\infty} \lvert I_m^n(f) - I(f)\rvert = 0$.	
8.	Es seien $a = 0$, $b = 1$ und $I_2(f)$ die Simpsonregel. Gib das kleinste n an, für das der Fehler $I(2\,x^n + x) - I_2(2\,x^n + x)$ **nicht** 0 ist.	