Aufgabe 3 (2 + 7 = 9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{6} + y &= 9 \\ x + y^2 &= 7 \end{aligned}$$

sollen iterativ mit den Newton- und vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete ganzzahlige Startwerte an.

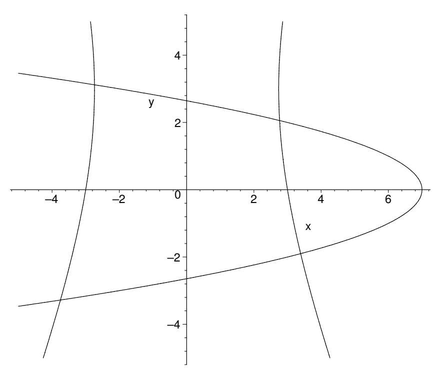
b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 2. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Teil a) Skizze (Parabel $x = 7 - y^2$ und Hyperbel (z.B.): $y = 0 \leftrightarrow x = \pm 3$, $y = 3 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{7.5}$ und $y = -3 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{13.5}$). Zu skizzieren ist der gesamte Bereich:



Ganzzahlige Startwerte: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **(2)**

Teil b)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 1/6 \cdot y^2 + y - 9 \\ x + y^2 - 7 \end{pmatrix} \rightarrow f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x & -1/3 \cdot y + 1 \\ 1 & 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & | & -1.5 \\ 1 & 6 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.125 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2.75 \\ 3.125 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2.75 \\ 3.125 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5.5 & -0.041666667 & | & -0.059895833 \\ 1 & 6.25 & | & -0.015625 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -5.5 & -0.041666667 & | & -0.059895833 \\ 0 & 6.242424242 & | & -0.02651515145 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.01092233004 \\ -0.004247572805 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2.73907767 \\ 3.120752427 \end{pmatrix}$$

(5)

Vereinfachtes Newton-Verfahren (erster Schritt und $f(\mathbf{x}_1)$ vom Newton-Verfahren):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2.75 \\ 3.125 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & | & -0.0598958 \\ 1 & 6 & | & -0.015625 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.00998264 \\ -0.00426794 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2.74002 \\ 3.12073 \end{pmatrix}$$

(2)