

- **Maschinengenauigkeit:** Es sei  $\mathbb{M}(b, m, r, R)$  die Menge der Maschinenzahlen. Dann ist  $\text{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$  die relative Maschinengenauigkeit.

- **Fehlerverstärkung:** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  hinreichend oft differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \cdot \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \quad (1)$$

mit

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}, \quad (2)$$

bzw.

$$\underbrace{\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right|}_{\text{rel. Fehler der Ausgabe}} \leq \underbrace{\kappa_{\text{rel}}(x)}_{\text{Fehlerverstärkung}} \underbrace{\sum_{j=1}^n \left| \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right|}_{\text{rel. Fehler der Eingabe}} \quad (3)$$

mit

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \kappa_{\text{rel}}^{\infty}(x) = \max_j |\phi_j(x)|. \quad (4)$$

- **Störungssätze:** Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\det(A) \neq 0$  sei  $\kappa(A) := \kappa_{\|\cdot\|}(A) := \|A^{-1}\| \|A\|$ .

- Nur die rechte Seite  $b$  ist gestört, d.h.  $x + \Delta x$  ist die Lösung von  $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ . Dann gilt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (5)$$

Sei nun  $\tilde{x}$  die Annäherung der Lösung  $x$  und  $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$  das Residuum. Dann gilt:

$$\kappa(A)^{-1} \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \quad (6)$$

- Es gelte  $\kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$ . Es sei  $x + \Delta x$  die Lösung von  $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ . Dann gilt:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \quad (7)$$

- **Cholesky-Verfahren:** ( $A = L D L^T$ ) Für aufeinanderfolgende Spalten,  $k = 1, 2, \dots, n$  erhält man für  $d_{k,k}$  und  $l_{i,k}$  ( $i > k$ ):

$$d_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}^2 d_{j,j}, \quad l_{i,k} = \left( a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} d_{j,j} l_{k,j} \right) / d_{k,k} \quad (8)$$

- **Givens-Rotation:** Grundaufgabe: Gegeben  $(a, b)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Finde  $c, s \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } r := \pm \sqrt{a^2 + b^2}, \quad c := \frac{a}{r}, \quad s := \frac{b}{r} \quad (9)$$

- **Householder-Spiegelung:** Grundaufgabe: Zu  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \notin \text{span}(e^1)$ , finde  $v \in \mathbb{R}^n$  so, dass

$$Q_v y = \pm \|y\|_2 e^1 \quad \text{mit } Q_v = I - 2 \frac{v v^T}{v^T v} \quad (10)$$

Lösung: mit  $\alpha = \text{sign}(y_1) \|y\|_2$ ,  $v = y + \alpha e^1$  gilt  $Q_v y = -\alpha e^1$

- **Linearer Ausgleich:** ( $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{Rang}(A) = n$ : Finde  $x^* = \text{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ )

$$\kappa_2(A) := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} / \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (11)$$

Für die Kondition bezüglich Störungen in  $b$  gilt:

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}. \quad (12)$$

Dabei ist  $\Theta$  der Winkel zwischen  $Ax^*$  und  $b$ .

- **Banachscher Fixpunktsatz**

Es sei  $X$  ein linear normierter Raum mit Norm  $\|\cdot\|$ .  $E \subset X$  sei eine vollständige Teilmenge von  $X$ . Die Abbildung  $\Phi$  sei eine Selbstabbildung auf  $E$ :  $\Phi : E \rightarrow E$ . Ferner sei  $\Phi$  eine Kontraktion auf  $E$ :  $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$  für alle  $x, y \in E$ , mit  $L < 1$ . Dann gilt:

1. Es existiert genau ein Fixpunkt  $x^*$  von  $\Phi$  in  $E$ .
2. Für beliebiges  $x_0 \in E$  konvergiert  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  gegen den Fixpunkt  $x^*$ .
3. A-priori-Fehlerabschätzung:  $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$
4. A-posteriori-Fehlerabschätzung:  $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$

**Hinreichendes Kriterium:** Sei  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $E$  abgeschlossen und konvex sowie  $\Phi \in C^1(E)$  mit  $\Phi(E) \subset E$  und  $\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| \leq L < 1$ . Dann sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

- **Newtonverfahren:**  $x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k)$

**Durchführung des Newtonverfahrens für Systeme:**

Gegeben: Startwert  $x^0$ . Für  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

- Löse  $f'(x^k)s^k = -f(x^k)$
- Setze  $x^{k+1} = x^k + s^k$

- **Nichtlineare Ausgleichsrechnung:** gegeben  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $n \leq m$ ) stetig differenzierbar, finde  $x^*$  mit  $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$ .

**Gauß-Newton-Verfahren:** Startwert  $x^0$ , für  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

- Finde  $s^k$  mit minimaler 2-Norm so, dass  $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2 = \min_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(x^k)s + F(x^k)\|_2$ .
- Setze  $x^{k+1} = x^k + s^k$ .

Falls  $F'(x_k)$  vollen Rang hat, entspricht dies der Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)^T F'(x_k)]^{-1} F'(x_k)^T F(x_k)$$

**Levenberg-Marquardt-Verfahren:** Startwert  $x^0$ , für  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

- Finde  $s^k$  sodass  $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \|s^k\|_2^2 = \min_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(x^k)s + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \|s\|_2^2$  mit wählendem Parameter  $\mu > 0$ .
- Setze  $x^{k+1} = x^k + s^k$ .

Dies führt auf die Iterationsvorschrift  $x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)^T F'(x_k) + \mu^2 I]^{-1} F'(x_k)^T F(x_k)$

## • Interpolation

### Lagrange-Interpolationspolynom

Interpolationsproblem: zu gegebenen paarweise verschiedenen Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  und gegebenen Daten  $f(x_0), \dots, f(x_n)$ , finde  $P_n \in \Pi_n$  mit  $P_n(x_j) = f(x_j)$ ,  $j = 0, \dots, n$ .

Lagrange-Darstellung:  $P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{j,n}(x)$ , mit  $l_{j,n}(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$

### Neville-Aitken

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, \dots, x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) \quad (13)$$

Rekursionsformel:

$$P_{i,0} := f(x_i) \quad P_{i,k} := P(f|x_{i-k}, \dots, x_i)(x), \quad 0 \leq k \leq i \leq n, \quad (14)$$

$$P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}} (x - x_i) \quad \rightarrow \quad P_{n,n} = P_n(x) \quad (15)$$

### Newtonsche Interpolationsformel

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f + \dots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})[x_0, \dots, x_n]f \quad (16)$$

### Dividierte Differenzen

$$p_{i,0} := [x_i]f = f(x_i) \quad (17)$$

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0} \quad (18)$$

$$p_{i,k} = \frac{p_{i,k-1} - p_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}} \quad (19)$$

**Eigenschaft**  $[x_i, \dots, x_{k+i}]f = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ .

### Horner-Schema

Gegeben:  $p_{0,0}, \dots, p_{n,n}$ ,  $x$ .

$$- b_n := p_{n,n}$$

- Für  $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ :

$$b_k = p_{k,k} + (x - x_k) b_{k+1}$$

Dann ist  $P_n(x) = b_0$ .

### Interpolationsfehler

Seien  $x_0, \dots, x_n$  Stützstellen,  $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

Sei  $I := [\min\{a, x\}, \max\{b, x\}]$ . Für  $f \in C^{n+1}(I)$  existiert  $\xi \in I$  so, dass

$$f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (20)$$

Für  $\hat{x} \in [a, b]$  gilt:

$$|f(\hat{x}) - P(f|x_0, \dots, x_n)(\hat{x})| \leq \left| \prod_{j=0}^n (\hat{x} - x_j) \right| \max_{y \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \quad (21)$$

## • Numerische Integration

### Trapezregel:

Es sei  $f \in C^2([t_{k-1}, t_k])$ . Es gilt:  
 $\frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx + \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3$   
 für ein  $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$

### summierte Trapezregel:

$T(h) = h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(t_1) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right]$   
 mit  $nh = b - a$ , für  $f \in C^2([a, b])$ :

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

### summierte Simpson-Regel:

$$S(h) = \frac{h}{6} \left[ f(t_0) + 4f\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) + 2f(t_1) + 4f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + 2f(t_2) + \dots + 2f(t_{n-1}) + 4f\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) + f(t_n) \right]$$

### Newton-Cotes-Formeln

$$h = d - c,$$

für  $m = 0$ :  $x_0 = c + \xi_0 h$  mit  $\xi_0 := \frac{1}{2}$ ,

für  $m > 0$ :  $x_j = c + \xi_j h$  mit  $\xi_j := \frac{j}{m}$  für  $j = 0, \dots, m$

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j) = h \sum_{j=0}^m c_j f(c + \xi_j h)$$

Exaktheit vom Grade  $m$ :  $\forall Q \in \Pi_m$  gilt  $I_m(Q) = \int_c^d Q(x) dx$ .

$m$	Name	$\xi_j$	$c_j$	$I_m(f) - \int_c^d f(x) dx$
0	Mittelpunktsregel	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{h^3}{24} f^{(2)}(\xi)$
1	Trapezregel	0, 1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{h^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$

### Gauß-Quadratur (auf $[c, d]$ mit $h = d - c$ )

–  $G_m(f) = h \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$ , Exaktheitsgrad  $2m + 1$

– positive Gewichte  $\omega_i = \frac{1}{h} \int_c^d l_{im}(x) dx$

– Es ex.  $\xi \in [c, d]$ , so dass  $\left| G_m(f) - \int_c^d f(x) dx \right| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3 (2m+3)} h^{2m+3} |f^{(2m+2)}(\xi)|$