Aufgabe 5 (3 + 4 + 2 = 9 Punkte)

Zur Bestimmung des Integrals $I = \int_a^b f(x)\,dx$ sei folgende Quadraturformel mit 2 Stützstellen gegeben $(H = b - a)$:

$$I \approx I_1(f) = \frac{H}{2}\left[f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)H\right) + f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)H\right)\right]. \tag{1}$$

Der Fehler dieser Formel ist gegeben durch

$$E_1(f) = I - I_1(f) = \frac{H^5}{4320} f^{(4)}(z), \qquad z \in (a,b). \tag{2}$$

Nun sollen mit obiger Formel Näherungen für

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx \tag{3}$$

berechnet werden.

a) Leiten Sie für die Quadraturformel (1) die summierte Formel für n Teilintervalle mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ her, und geben Sie für diese eine Fehlerabschätzung unter Benutzung von (2) an.

b) Wenden Sie die summierte Formel aus a) auf (3) mit $n = 2$ an und schätzen Sie den Fehler ab.

c) Wie viele Teilintervalle sind erforderlich, um mit der in a) aufgestellten Formel das Integral (3) bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ zu bestimmen?

In den Kleingruppenübungen SS09 haben wir diese Aufgabe wie folgt behandelt: In den Wochen 12 und 13 die Aufgaben 8.1, 8.4, 8.6 und 8.7

Das war im Herbst 2002 bei NumaMB/Informatik die Aufgabe 3. Wir haben nur die Funktion $\frac{1}{1+x}$ durch $\ln(1+x)$ ersetzt.

Teil a) Auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = a + i\,h$, $h = \frac{b-a}{n}$, lautet die Quadraturformel (1)

$$\frac{h}{2}\left[f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h - \frac{\sqrt{3}\,h}{6}\right) + f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h + \frac{\sqrt{3}\,h}{6}\right)\right].$$

Wir setzen

$$m_i := a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h \quad \text{und} \quad \tilde{h} := \frac{\sqrt{3}\,h}{6}.$$

Damit ergibt sich aufsummiert für alle Intervalle $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$I_1^{sum}(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(m_i - \tilde{h}) + f(m_i + \tilde{h})\right). \tag{4}$$

Für den Fehler gilt auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$

$$\frac{h^5}{4320} f^{(4)}(\xi_i), \qquad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}),$$

also aufsummiert (vgl. Folien für Dozenten K10 p4,p5 und p11,p12 sowie Übungen SS09 Woche 12 und 13 Aufgabe 8.4 – man muss bei der summierten Simpsonregel nur die 2880 durch 4320 ersetzen) mit $M_4 := \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$

$$|E_1^{sum}(f)| \le n\,\frac{h^5}{4320}\,M_4 = \frac{b-a}{4320}\cdot h^4 \cdot M_4 \quad \left(= \frac{(b-a)^5}{4320}\cdot\frac{1}{n^4}\cdot M_4\right). \tag{5}$$

Teil b) (**Bem.:** Wenn man die Formel (4) nicht herleiten konnte, kann man (1) auf die Intervalle $[0, 0.5]$ und $[0.5, 1]$ anwenden und die Werte summieren.)

Nun ist

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad a = 0, \qquad b = 1, \qquad n = 2 \quad \text{und somit} \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}.$$

Das ergibt die Zwischenstellen $m_0 = a + 0.5\,h = 0.25$ und $m_1 = a + 1.5\,h = 0.75$ sowie $\tilde{h} = \sqrt{3}\,0.5\,/\,6 = 0.1443375673$. Also

$$I_1^{sum}(f) = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \ln\left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \ln\left(\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \ln\left(\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\right) = 0.3863174234$$

Für die Fehlerabschätzung (auch hierfür braucht man die summierte Formel nicht) berechnen wir die Ableitungen von f:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4},$$

Der Betrag der 4. Ableitung ist auf $[0, 1]$ positiv und streng monoton fallend; er nimmt daher sein Maximum am linken Intervallrand an, also

$$M_4 = |f^{(4)}(0)| = 6.$$

Eingesetzt in (5) ergibt sich daher

$$|E_1^{sum}(f)| \leq \frac{1-0}{4320} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 6 \approx 0.868 \cdot 10^{-4}.$$

Das Ergebnis ist damit auf 4 Stellen genau.

Teil c) Für den Fehler gilt gemäß (5)

$$|E_1^{sum}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{4320} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot M_4 \overset{!}{\leq} \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}.$$

Aufgelöst nach n ergibt sich

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5\,M_4}{4320\,\varepsilon}} = \sqrt[4]{\frac{6}{4320 \cdot 0.5}\,10^6} = 7.2\ldots,$$

also aufgerundet

$$n \geq 8.$$