Veranstaltung Titel

Vortragender

Assistenten

Institut XXX

Wintersemester/Sommersemester xyz

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 10.1-10.3

- Einleitung
- Trapezregel, Simpson-Regel, Fehlerformeln
- Interpolatorische Quadratur
- Newton-Cotes-Formeln

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 10.1-10.3

- Einleitung
- Trapezregel, Simpson-Regel, Fehlerformeln
- Interpolatorische Quadratur
- Newton-Cotes-Formeln

Was Sie mitnehmen sollten:

- Grundidee der numerischen Integration
- Wie konstruiert man eine wiederholte Trapez- oder Simpson-Regel
- Wie sehen die Fehlerschranken dazu aus
- Wie werden die Newton-Cotes-Formeln konstruiert

Problemstellung

Die numerische Berechnung von Integralen (auch Quadratur genannt):

Problemstellung

Konstruktion von Näherungsformeln für ein eindimensionales Integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

einer stetigen Funktion $f \in C([a, b])$.

Problemstellung

Die numerische Berechnung von Integralen (auch Quadratur genannt):

Problemstellung

Konstruktion von Näherungsformeln für ein eindimensionales Integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

einer stetigen Funktion $f \in C([a,b])$.

Diese Aufgabe kann man als die Aufgabe der Auswertung des linearen Funktionals

$$L : C([a,b]) \to \mathbb{R}, \quad L(f) = \int_a^b fx)\,dx$$

auffassen. Insbesondere ist die gesuchte Lösung eine skalare Größe.

Kondition

Sei $I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$ Es gilt:

$$\left|I - \tilde{I}\right| \;=\; \left|\int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| dx$$

Kondition

Sei $I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$ Es gilt:

$$\begin{aligned} \left|I - \tilde{I}\right| &= \left|\int_a^b f(x) - \tilde{f}(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| dx \\ &\leq (b-a)\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty . \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ absolute Kondition ist gut.

Kondition

Sei $I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$ Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\left|I - \tilde{I}\right| &= \left|\int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| dx \\
&\leq (b-a)\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty .
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ absolute Kondition ist gut.

$$
\frac{\left|I - \tilde{I}\right|}{|I|} \leq (b-a)\frac{\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty}{\left|\int_a^b f(x) dx\right|} =
$$

Kondition

Sei $I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$ Es gilt:

$$\begin{aligned} \left|I - \tilde{I}\right| &= \left|\int_a^b f(x) - \tilde{f}(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| dx \\ &\leq (b-a)\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty . \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ absolute Kondition ist gut.

$$\frac{\left|I - \tilde{I}\right|}{|I|} \leq (b-a)\frac{\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty}{|\int_a^b f(x)dx|} = \underbrace{\frac{\int_a^b \|f\|_\infty dx}{|\int_a^b f(x)dx|}}_{=\kappa_{\mathrm{rel}}} \frac{\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty}{\|f\|_\infty}.$$

Kondition

Sei $I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$ Es gilt:

$$\begin{aligned}\left|I - \tilde{I}\right| &= \left|\int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| dx \\ &\leq (b-a)\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty .\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ absolute Kondition ist gut.

$$\frac{\left|I - \tilde{I}\right|}{|I|} \leq (b-a)\frac{\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|} = \underbrace{\frac{\int_a^b \|f\|_\infty dx}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|}}_{=\kappa_{\mathrm{rel}}} \frac{\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty}{\|f\|_\infty}.$$

$\Rightarrow$ relative Kondition **kann** schlecht sein.

Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile $[a, b]$ in Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ z.B. mit $t_j = a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = (b - a)/n$.

Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile $[a, b]$ in Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ z.B. mit $t_j = a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = (b - a)/n$.
2. Approximiere f auf jedem Intervall $[t_{k-1}, t_k]$ durch eine einfach zu integrierende Funktion g_k, und verwende

$$\int_a^b f(x)dx =$$

Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile $[a, b]$ in Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ z.B. mit $t_j = a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = (b - a)/n$.
2. Approximiere f auf jedem Intervall $[t_{k-1}, t_k]$ durch eine einfach zu integrierende Funktion g_k, und verwende

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)dx$$

Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

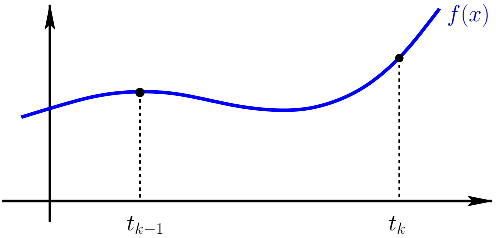
1. Man unterteile $[a, b]$ in Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ z.B. mit $t_j = a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = (b - a)/n$.
2. Approximiere f auf jedem Intervall $[t_{k-1}, t_k]$ durch eine einfach zu integrierende Funktion g_k, und verwende

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x)dx$$

als Näherung für das exakte Integral.

Trapezregel

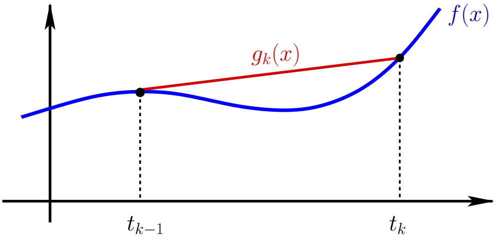
- Lineare Interpolation an den Intervallenden von $[t_{k-1}, t_k]$, d.h.



Trapezregel

- Lineare Interpolation an den Intervallenden von $[t_{k-1}, t_k]$, d.h.

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

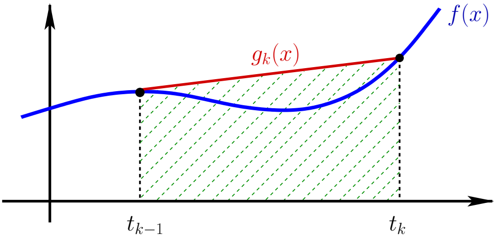


Trapezregel

- Lineare Interpolation an den Intervallenden von $[t_{k-1}, t_k]$, d.h.

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

- Das Integral ist damit gegeben durch



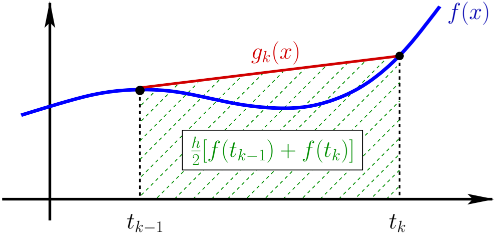
Trapezregel

- Lineare Interpolation an den Intervallenden von $[t_{k-1}, t_k]$, d.h.

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

- Das Integral ist damit gegeben durch

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x)\, dx = \frac{h}{2} \left[f(t_{k-1}) + f(t_k) \right]$$



Summierte Trapezregel

Wiederholtes Anwenden der Trapezregel auf jedem Teilinterval $[t_{k-1}, t_k]$ als Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$ liefert die

Summierte Trapezregel

Wiederholtes Anwenden der Trapezregel auf jedem Teilinterval $[t_{k-1}, t_k]$ als Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$ liefert die

Summierte Trapezregel

$$T(h) = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

Summierte Trapezregel

Wiederholtes Anwenden der Trapezregel auf jedem Teilinterval $[t_{k-1}, t_k]$ als Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$ liefert die

Summierte Trapezregel

$$T(h) = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

Für den Verfahrensfehler der Teilintegrale gilt folgende Darstellung:

Lemma 10.1

Sei $f \in C^2([t_{k-1}, t_k])$. Es gilt für geignetes $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$\frac{h}{2}\left[f(t_{k-1}) + f(t_k)\right] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx + \frac{f''(\xi_k)}{12}h^3$$

Summierte Trapezregel

Für den Verfahrensfehler von $T(h)$ ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|T(h) - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3\right| \\ &\leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^{n} \left|f''(\xi_k)\right| \leq \frac{h^3}{12} n \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|.\end{aligned}$$

Summierte Trapezregel

Für den Verfahrensfehler von $T(h)$ ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| T(h) - \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3 \right| \\ &\leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^{n} \left| f''(\xi_k) \right| \leq \frac{h^3}{12} n \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|. \end{aligned}$$

Mit $nh = b - a$ ergibt sich insgesamt die

Fehlerschranke

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|$$

Summierte Trapezregel

Ebenfalls erhält man wegen

$$E(h) := T(h) - \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} h^3 \frac{f''(\xi_k)}{12} = \frac{h^2}{12} \sum_{k=1}^{n} h f''(\xi_k)$$

und

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(h)}{h^2} = \frac{1}{12} \int_a^b f''(x)\,dx = \frac{1}{12} \left(f'(b) - f'(a)\right)$$

Summierte Trapezregel

Ebenfalls erhält man wegen

$$E(h) := T(h) - \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} h^3 \frac{f''(\xi_k)}{12} = \frac{h^2}{12} \sum_{k=1}^{n} h f''(\xi_k)$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{h^2} = \frac{1}{12} \int_a^b f''(x)\,dx = \frac{1}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right)$$

die

Fehlerschätzung

$$E(h) \approx \widehat{E}(h) := \frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right)$$

Beispiel 10.2

Zur näherungsweise Berechnung von

$$\boldsymbol{I = \int_0^{\pi/2} (x\cos x + e^x)dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2}$$

mit der Trapezregel ergeben sich die in folgender Tabelle angegebenen Näherungswerte, Verfahrensfehler und Fehlerschätzungen.

n	$T(h)$	$\lvert E(h)\rvert = \lvert T(h) - I\rvert$	$\lvert\hat{E}(h)\rvert = \frac{h^2}{12}\lvert f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'(0)\rvert$
4	4.396928	1.57e−02	1.59e−02
8	4.385239	3.97e−03	3.98e−03
16	4.382268	9.95e−04	9.96e−04
32	4.381523	2.49e−04	2.49e−04

Interpolatorische Quadratur

- Für ein typisches Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ stehe der Einfachheit halber im Folgenden $[c, d]$.
- Seien nun $x_0, \ldots, x_m \in [c, d]$ paarweise verschiedene Punkte.

Interpolatorische Quadraturformel

$$I_m(f) := \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx$$

Interpolatorische Quadratur

- Für ein typisches Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ stehe der Einfachheit halber im Folgenden $[c, d]$.
- Seien nun $x_0, \ldots, x_m \in [c, d]$ paarweise verschiedene Punkte.

Interpolatorische Quadraturformel

$$I_m(f) := \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx$$

Satz 10.4

Sei $I_m(f)$ wie oben. Für jedes Polynom $Q \in \Pi_m$ gilt

$$I_m(Q) = \int_c^d Q(x)\, dx.$$

Man sagt, die Quadraturformel ist exakt vom Grade m.

Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx$$

Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\int_c^d P(f|x_0,\ldots,x_m)(x)\,dx = \int_c^d \sum_{j=0}^{m} f(x_j)\ell_{jm}(x)\,dx$$

Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\begin{aligned}\int_c^d P(f|x_0,\ldots,x_m)(x)\,dx &= \int_c^d \sum_{j=0}^{m} f(x_j)\ell_{jm}(x)\,dx \\ &= \sum_{j=0}^{m} f(x_j)\int_c^d \ell_{jm}(x)\,dx\end{aligned}$$

Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\begin{aligned}
\int_c^d P(f|x_0,\ldots,x_m)(x)\,dx &= \int_c^d \sum_{j=0}^{m} f(x_j)\ell_{jm}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \int_c^d \ell_{jm}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}\,dx
\end{aligned}$$

Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\begin{aligned}
\int_c^d P(f|x_0,\dots,x_m)(x)\,dx &= \int_c^d \sum_{j=0}^{m} f(x_j)\ell_{jm}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \int_c^d \ell_{jm}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}\,dx \\
&= h \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \underbrace{\frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}\,dx}
\end{aligned}$$

Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\begin{aligned}
\int_c^d P(f|x_0,\ldots,x_m)(x)\,dx &= \int_c^d \sum_{j=0}^m f(x_j)\ell_{jm}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^m f(x_j)\int_c^d \ell_{jm}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^m f(x_j)\int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^m \frac{x-x_k}{x_j-x_k}\,dx \\
&= h\sum_{j=0}^m f(x_j)\,\underbrace{\frac{1}{h}\int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^m \frac{x-x_k}{x_j-x_k}\,dx}_{c_j} \\
&= h\sum_{j=0}^m f(x_j)\cdot c_j
\end{aligned}$$

Interpolatorische Quadratur

Lemma 10.5

Die interpolatorische Quadraturformel $I_m(f)$ hat die Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j f(x_j),$$

wobei $h = d - c$. Die c_j sind durch

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x)\, dx$$

gegeben, wobei ℓ_{jm} $(0 \leq j \leq m)$ die Lagrange-Fundamental-Polynome zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_m$ sind.

Allgemeine Quadraturformel

Lemma 10.6

Sei $\hat{I}_m(f) = \sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ eine allgemeine Quadraturformel mit

$$\hat{I}_m(Q) = \int_c^d Q(x)\,dx \quad \text{für alle } Q \in \Pi_m.$$

Dann gilt

$$w_j = hc_j, \quad \text{mit } c_j \text{ aus Lemma 10.5, für alle } j = 0, \ldots, n.$$

Newton-Cotes-Formeln

Wählt man speziell die Stützstellen x_j äquidistant

$$
\begin{aligned}
x_0 &= c + \frac{1}{2}h =: c + \mu_0 h, \quad \text{wenn } m = 0 \\
x_j &= c + \frac{j}{m}h =: c + \mu_j h, \quad j = 0, \ldots, m, \ \text{wenn } m > 0,
\end{aligned}
$$

erhält man die **Newton-Cotes-Formeln.**

Newton-Cotes-Formeln

Wählt man speziell die Stützstellen x_j äquidistant

$$\begin{aligned} x_0 &= c + \frac{1}{2}h =: c + \mu_0 h, \quad \text{wenn } m = 0 \\ x_j &= c + \frac{j}{m}h =: c + \mu_j h, \quad j = 0, \ldots, m, \text{ wenn } m > 0, \end{aligned}$$

erhält man die **Newton-Cotes-Formeln.**

Beispiel

Für $m = 1$ erhalten wir $x_0 = c$ $(\mu_0 = 0)$, $x_1 = d$ $(\mu_1 = 1)$ und

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{h}\int_c^d \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}dx = \frac{1}{2} \\ c_1 &= \frac{1}{h}\int_c^d \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Newton-Cotes-Formeln

Man kann die interpolatorische Quadraturformel in der Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j f(c + \mu_j h)$$

mit normierten Stützstellen μ_j und Gewichten c_j schreiben, die jetzt unabhängig vom speziellen Intervall $[c, d]$ sind, z.B.

Newton-Cotes-Formeln

Man kann die interpolatorische Quadraturformel in der Form

$$I_m(f) = h\sum_{j=0}^{m} c_j f(c+\mu_j h)$$

mit normierten Stützstellen μ_j und Gewichten c_j schreiben, die jetzt unabhängig vom speziellen Intervall $[c,d]$ sind, z.B.

m		μ_j	c_j	$I_m(f) - \int_c^d f(x)dx$
0	Mittelpunktsregel	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{24}h^3 f^{(2)}(\xi)$
1	Trapezregel	$0, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}\left(\frac{1}{2}h\right)^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$-Regel	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{80}\left(\frac{1}{3}h\right)^5 f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$\frac{8}{945}\left(\frac{1}{4}h\right)^7 f^{(6)}(\xi)$

Summierte Newton-Cotes-Formeln

Beispiel: Summierte Simpson-Regel

$$S(h) = \int_a^b f(x)dx + E(h) \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} S(h) &= \frac{h}{6}\Bigg[f(t_0) + 4f\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) + 2f(t_1) + 4f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \\ &\quad + 2f(t_2) + \cdots + 2f(t_{n-1}) + 4f\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) + f(t_n)\Bigg] \end{aligned}$$

Summierte Newton-Cotes-Formeln

Beispiel: Summierte Simpson-Regel

$$S(h) = \int_a^b f(x)dx + E(h) \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} S(h) &= \frac{h}{6}\Big[f(t_0) + 4f\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) + 2f(t_1) + 4f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \\ &\quad +2f(t_2) + \cdots + 2f(t_{n-1}) + 4f\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) + f(t_n)\Big] \end{aligned}$$

und Fehlerdarstellung

$$E(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi_k) = \frac{h^4}{2880}\sum_{k=1}^{n} h f^{(4)}(\xi_k),$$

Summierte Simpson-Regel

Es gilt, wegen $nh = b - a$,

$$|E(h)| \leq \frac{h^4}{2880}(b-a)\|f^{(4)}\|_\infty$$

$$E(h) \approx \frac{h^4}{2880}\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx = \frac{h^4}{2880}\left(f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)\right)$$

Beachte

Beim Aufsummieren der einzelnen Teilintegrale,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx,$$

geht im Fehler eine h-Potenz verloren.

Beispiel 10.7

Wie in Beispiel 10.2 ergeben sich für die näherungsweise Berechnung von

$$I = \int_0^{\pi/2} (x \cos x + e^x) dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

folgende Resultate:

n	$S(h)$	$\lvert E(h) \rvert$	$\frac{h^4}{2880} \left\lvert f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - f^{(3)}(0) \right\rvert$
4	4.381343022	6.93e-05	6.92e-05
8	4.381278035	4.33e-06	4.33e-06
16	4.381273978	2.70e-07	2.70e-07
32	4.381273725	1.69e-08	1.69e-08

Zusammenfassung

- Die absolute Kondition des Problems der Integralbestimmung ist gut.
- Numerische Integration basiert auf Integration des Interpolationspolynoms auf einem Teilintervall
- $I_m(f) = \int_c^d P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)dx, \quad [c, d]$: Teilintervall

  $$\Rightarrow I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j f(x_j), \quad h = d - c$$

  c_j: hängt nur von den Stützstellen ab.

Zusammenfassung

- Die absolute Kondition des Problems der Integralbestimmung ist gut.
- Numerische Integration basiert auf Integration des Interpolationspolynoms auf einem Teilintervall
- $I_m(f) = \int_c^d P(f \mid x_0, \dots, x_m)(x)dx, \quad [c, d]$: Teilintervall

  $$\Rightarrow I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j f(x_j), \quad h = d - c$$

  c_j: hängt nur von den Stützstellen ab.
- Newton-Cotes: äquidistante Stützstellen $x_0, \dots, x_m$ und Exaktheitsgrad m oder $m + 1$.
- Für die summierten Quadraturegeln gibt es Fehlerschranken und Fehlerschätzungen.