Veranstaltung Titel

Vortragender

Assistenten

Institut XXX

Wintersemester/Sommersemester xyz

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 11.1-11.4

- Problemstellung und Beispiele
- Einige theoretische Grundlagen
- Einfache Einschrittverfahren

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 11.1-11.4

- Problemstellung und Beispiele
- Einige theoretische Grundlagen
- Einfache Einschrittverfahren

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie wird ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert?
- Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf.
- Wie sehen das explizite/implizite Euler-Verfahren und die Trapezmethode aus?

Einleitung

Skalare gewöhnliche Differentialgleichung

Gesucht wird eine Funktion $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ einer (Zeit-)Variablen t, die der Gleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \quad t \in [t_0, T] \ ,$$

und der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y^0$$

genügen soll.

Einleitung

Skalare gewöhnliche Differentialgleichung

Gesucht wird eine Funktion $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ einer (Zeit-)Variablen t, die der Gleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \quad t \in [t_0, T] \ ,$$

und der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y^0$$

genügen soll.

Biespiel 11.1

Gesucht wird eine Funktion $y(t)$, $t \geq 0$, für die

$$y' = 2ty^2 \quad (t \geq 0) \quad \text{und} \quad y(0) = 1$$

Allgemeine Problemstellung

System n gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)), \end{aligned}$$

für $t \in [t_0, T]$. Anfangsbedingung: $y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, n$.

Notation:

$$y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, f(t,y) := \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \end{pmatrix}, y^0 := \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Problemstellung

Anfangswertproblem

Gesucht $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ so dass

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \;, \quad t \in [t_0, T] \;, \\ y(t_0) &= y^0 \end{aligned}$$

Allgemeine Problemstellung

Anfangswertproblem

Gesucht $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ so dass

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \ , \quad t \in [t_0, T] \ , \\ y(t_0) &= y^0 \end{aligned}$$

Beispiel 11.2

Gesucht $y_1(t)$, $y_2(t)$, $t \geq 0$, für die

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_1 - y_2 \\ 2y_1 - 2y_2 + 3\sin t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Lösung:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Beispiel 11.3

Räuber-Beute-Modell von Lottka und Volterra.

Es seien $y_1(t)$ die Beute-Population und $y_2(t)$ die Räuber-Population zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Die Lottka-Volterra-Gleichung ist

$$\begin{aligned} y_1' &= c_1 y_1 (1 - d_1 y_2), \quad y_1(0) = y_1^0, \\ y_2' &= c_2 y_2 (d_2 y_1 - 1), \quad y_2(0) = y_2^0, \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten c_1, c_2, d_1, d_2.

Beispiel 11.4

Chemische Reaktionsprozesse. Seien $S_1, \dots, S_n$ chemische Stoffe, die miteinander reagieren. Die i-te Reaktion wird durch

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_j \xrightarrow{k_i} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} S_j$$

beschrieben, wobei a_{ij}, b_{ij} die stöchiometrischen Koeffizienten sind und k_i die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante ist.

Beispiel 11.4

Chemische Reaktionsprozesse. Seien $S_1, \ldots, S_n$ chemische Stoffe, die miteinander reagieren. Die i-te Reaktion wird durch

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_j \xrightarrow{k_i} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} S_j$$

beschrieben, wobei a_{ij}, b_{ij} die stöchiometrischen Koeffizienten sind und k_i die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante ist.

Beispiel: chemische Pyrolyse. Das Reaktionsschema:

$$\begin{aligned} S_1 &\xrightarrow{k_1} S_2 + S_3 \\ S_2 + S_3 &\xrightarrow{k_2} S_5 \\ S_1 + S_3 &\xrightarrow{k_3} S_4 \\ S_4 &\xrightarrow{k_4} S_3 + S_6. \end{aligned}$$

Beispiel 11.4

Das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
y_1' &= -k_1 y_1 - k_3 y_1 y_3 \\
y_2' &= k_1 y_1 - k_2 y_2 y_3 \\
y_3' &= k_1 y_1 - k_2 y_2 y_3 - k_3 y_1 y_3 + k_4 y_4 \\
y_4' &= k_3 y_1 y_3 - k_4 y_4 \\
y_5' &= k_2 y_2 y_3 \\
y_6' &= k_4 y_4.
\end{aligned}$$

Anfangsbedingungen: $y_1(0) = 1.8 \cdot 10^{-3}$, $y_i(0) = 0$ für $i = 2, \ldots, 6$. Die Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten

$$k_1 = 7.9 \cdot 10^{-10},\ k_2 = 1.1 \cdot 10^{9},\ k_3 = 1.1 \cdot 10^{7},\ k_4 = 1.1 \cdot 10^{3}.$$

sind von sehr unterschiedlicher Größenordnung.

Beispiel 11.5

Partielle Differentialgleichung: gesucht $T(x,t)$, $x \in [0,\ell], t > 0$, so dass

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0,\ell).$$

mit Anfangswert $T(x,0) = \Phi(x)$ und
Randwerten $T(0,t) = T(\ell,t) = 0$.
$\kappa > 0$ eine bekannte Konstante.

Beispiel 11.5

Partielle Differentialgleichung: gesucht $T(x,t)$, $x \in [0,\ell], t > 0$, so dass

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0,\ell).$$

mit Anfangswert $T(x,0) = \Phi(x)$ und
Randwerten $T(0,t) = T(\ell,t) = 0$.
$\kappa > 0$ eine bekannte Konstante.

Diskretisierung dieses Problems mit der Linien-Methode.
Approximation

$$\kappa \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{\kappa}{h_x^2} \left(T(x+h_x,t) - 2T(x,t) + T(x-h_x,t)\right),$$

mit $h_x = \frac{\ell}{n_x}$, und $n_x \in \mathbb{N}$.

Beispiel 11.5

Man sucht für jeden Orts-Gitterpunkt $x_j = jh_x$ Funktionen

$$y_j(t) \approx T(x_j, t), \quad j = 1, 2, \ldots, n_x - 1,$$

die das im Ort diskretisierte Näherungsproblem

$$y_j' = \frac{\kappa}{h_x^2}(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, n_x - 1,$$

erfüllen.

Beispiel 11.5

Man sucht für jeden Orts-Gitterpunkt $x_j = jh_x$ Funktionen

$$y_j(t) \approx T(x_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, n_x - 1,$$

die das im Ort diskretisierte Näherungsproblem

$$y_j' = \frac{\kappa}{h_x^2}(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n_x - 1,$$

erfüllen. Wegen $y_0(t) = y_{n_x}(t) = 0$ für $t > 0$, sind lediglich die Funktionen y_j, $1 \leq j \leq n_x - 1$ unbekannt.
Notationen: $y := (y_1, y_2, \dots, y_{n_x - 1})^T$,

$$y(0) = y^0 := \begin{pmatrix} \Phi(x_1) \\ \vdots \\ \Phi(x_{n_x - 1}) \end{pmatrix}$$

Beispiel 11.5

Das sich ergebende Problem:

$$\begin{aligned} y' = f(t, y) = Ay, \quad t > 0, \\ y(0) = y^0 \end{aligned}$$

mit

$$A = -\frac{\kappa}{h_x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x-1)\times(n_x-1)}$$

Skalare Probleme höherer Ordnung

Das mathematische Pendel

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\phi''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\phi(t)), \quad t \geq 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = 0,$$

Skalare Probleme höherer Ordnung

Das mathematische Pendel

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\phi''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\phi(t)), \quad t \geq 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = 0,$$

Allgemeine skalare Anfangswertaufgabe m-ter Ordnung

Bestimme eine skalare Funktion $y(t)$, so dass

$$y^{(m)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)})\ , \quad t \in [t_0, T]\ ,$$
$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \ldots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = z_{m-1}.$$

Reduktion auf ein System 1. Ordnung

Aufgabe:

$$y^{(m)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) \ , \quad t \in [t_0, T] \ ,$$
$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \ldots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = z_{m-1}.$$

Reduktion auf ein System 1. Ordnung

Aufgabe:

$$y^{(m)} = g(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \ , \quad t \in [t_0, T] \ ,$$
$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = z_{m-1}.$$

Äquivalentes System von m Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_3(t) \\ & \vdots & \\ y_{m-1}'(t) & = & y_m(t) \\ y_m'(t) & = & g(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \end{array}\right\} \quad \text{für} \ \ t \in [t_0, T]$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(t_0) = z_0, \quad \dots, \quad y_m(t_0) = z_{m-1}$$

Beispiel 11.8

Aufgabe:

$$y''' = -2y'' + y' + y^2 - e^t, \quad t \in [0, T],$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Beispiel 11.8

Aufgabe:

$$y''' = -2y'' + y' + y^2 - e^t, \quad t \in [0,T],$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Neue Variablen

$$y_1(t) := y(t), \quad y_2(t) := y'(t), \quad y_3(t) := y''(t).$$

Das äquivalente System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -2y_3 + y_2 + y_1^2 - e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T],$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1,0,0).$$

Satz von Picard-Lindelöf

Satz 11.10

Es seien $T > t_0$, $\mathcal{U}$ eine Umgebung des Anfangsvektors $y^0 \in \mathbb{R}^n$, und $f : [t_0, T] \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, für die Folgendes gilt:

- f ist stetig in (t, y) auf $[t_0, T] \times \mathcal{U}$.
- f ist Lipschitz-stetig in y, D.h., es existiert eine Konstante L, so dass

  $$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq L\|y - z\| \text{ für alle } t \in [t_0, T],\ y, z \in \mathcal{U}$$

  (wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige feste Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist).

Dann existiert eine eindeutige Lösung y in einer Umgebung von t_0 (die von T und L abhängt).

Empfindlichkeit bzgl. Störung in Anfangsdaten

Satz 11.12

Die Funktion $\boldsymbol{f}$ sei Lipschitz-stetig in $\boldsymbol{y}$ (bzgl. einer Umgebung $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ von $\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{z^0} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$). Es seien $\boldsymbol{y(t)}$, $\boldsymbol{z(t)}$ Lösungen des Anfangswertproblems bezüglich der Anfangsdaten $\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{z^0} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Dann gilt für alle $\boldsymbol{t}$ aus einer Umgebung von $\boldsymbol{t_0}$ die Abschätzung

$$\|\boldsymbol{y(t)} - \boldsymbol{z(t)}\| \leq \boldsymbol{e^{L|t-t_0|}} \left\|\boldsymbol{y^0} - \boldsymbol{z^0}\right\|.$$

Empfindlichkeit bzgl. Störung in Anfangsdaten

Satz 11.12

Die Funktion $\boldsymbol{f}$ sei Lipschitz-stetig in $\boldsymbol{y}$ (bzgl. einer Umgebung $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ von $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}, \boldsymbol{z}^{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$). Es seien $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$ Lösungen des Anfangswertproblems bezüglich der Anfangsdaten $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}, \boldsymbol{z}^{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Dann gilt für alle $\boldsymbol{t}$ aus einer Umgebung von $\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}}$ die Abschätzung

$$\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\| \leq \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{L}|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}}|} \left\|\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}} - \boldsymbol{z}^{\mathbf{0}}\right\|.$$

$\Rightarrow$: unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf hängt die (lokal) eindeutige Lösung stetig von den Anfangsbedingungen ab.

Beispiel 11.13

Die skalaren Probleme ($n = 1$)

$$y' = Ly, \quad y(t_0) = y^0, \qquad z' = Lz, \quad z(t_0) = z^0, \quad \text{mit } L > 0.$$

Lösungen für $t \geq t_0$:

$$y(t) = y^0 e^{L|t-t_0|}, \quad z(t) = z^0 e^{L|t-t_0|}.$$

Wegen $f(t, y) - f(t, z) = L(y - z)$ ist die Lipschitzkonstante genau L.

Beispiel 11.13

Die skalaren Probleme ($n = 1$)

$$y' = Ly, \quad y(t_0) = y^0, \qquad z' = Lz, \quad z(t_0) = z^0, \quad \text{mit } L > 0.$$

Lösungen für $t \geq t_0$:

$$y(t) = y^0 e^{L|t-t_0|}, \quad z(t) = z^0 e^{L|t-t_0|}.$$

Wegen $f(t, y) - f(t, z) = L(y - z)$ ist die Lipschitzkonstante genau L.

$$y(t) - z(t) = e^{L|t-t_0|}(y^0 - z^0)$$

$$\frac{|y(t) - z(t)|}{|y(t)|} = \frac{e^{L|t-t_0|}\,|y^0 - z^0|}{|y^0|\,e^{L|t-t_0|}} = \frac{|y^0 - z^0|}{|y^0|}$$

Beispiel 11.13

Die skalaren Probleme ($n = 1$)

$$y' = Ly, \quad y(t_0) = y^0, \qquad z' = Lz, \quad z(t_0) = z^0, \quad \text{mit } L > 0.$$

Lösungen für $t \geq t_0$:

$$y(t) = y^0 e^{L|t-t_0|}, \quad z(t) = z^0 e^{L|t-t_0|}.$$

Wegen $f(t, y) - f(t, z) = L(y - z)$ ist die Lipschitzkonstante genau L.

$$y(t) - z(t) = e^{L|t-t_0|}(y^0 - z^0)$$

$$\frac{|y(t) - z(t)|}{|y(t)|} = \frac{e^{L|t-t_0|}\,|y^0 - z^0|}{|y^0|\,e^{L|t-t_0|}} = \frac{|y^0 - z^0|}{|y^0|}$$

In diesem Beispiel ist die relative Kondition für alle Werte von y^0 und L gut, während die absolute Kondition für $L \gg 1$ schlecht ist.

Darstellung als Integralgleichung

Bemerkung 11.14

Die Funktion y löst die Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [t_0, T]$, $y(t_0) = y^0$ genau dann, wenn sie die Integralgleichung

$$y(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \quad t \in [t_0, T],$$

löst.

Beachte: Falls f eine Vektorfunktion ist, wird bei $\int f\, ds$ jede Komponente von f integriert.

Gronwall-Lemma

Beobachtng:

$$v(t) = C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\,ds \quad \Longrightarrow \quad v(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds}$$

Ungleichungs-Analogon:

Gronwall-Lemma 11.15

Für jedes $C \geq 0$ und beliebiges stückweise stetiges $v(t) \geq 0$, $u(t) \geq 0$ für $t \geq t_0$, impliziert

$$v(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\,ds, \quad t \geq t_0,$$

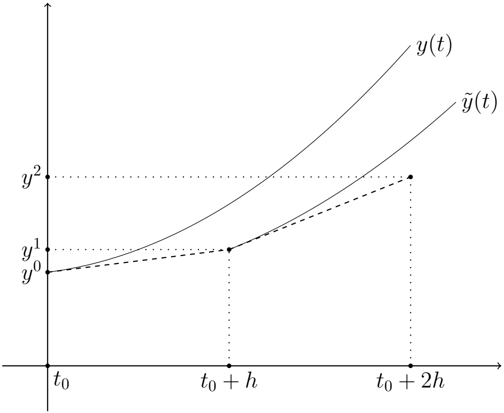
die Ungleichung

$$v(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds}, \quad t \geq t_0.$$

Einfache Einschrittverfahren

Das Euler-Verfahren:

$$\boldsymbol{y^1 = y^0 + hf(t_0, y^0)}$$



Herleitungsprinzip

Sei $(t_j, y^j) \in \mathbb{R}^2$ gegeben.
Wir nehmen diese Daten als (künstliche) Anfangsbedingung:

$$\tilde{y}' = f(t, \tilde{y}) \quad \text{für} \quad t \in [t_j, T], \quad \tilde{y}(t_j) = y^j.$$

Die Lösung $\tilde{y}$ ist auch Lösung der Integralgleichung

$$\tilde{y}(t) = y^j + \int_{t_j}^{t} f(s, \tilde{y}(s))\, ds, \quad t \in [t_j, T].$$

Insbesondere gilt für $t = t_{j+1} > t_j$:

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \tilde{y}(s))\, ds.$$

Herleitungsprinzip

Quadratur zur Approximation des Integrals. Z.B. Rechteckregel:

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \tilde{y}(s))\, ds \approx y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, y^j)\, ds =: y^j$$

Herleitungsprinzip

Quadratur zur Approximation des Integrals. Z.B. Rechteckregel:

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \tilde{y}(s))\, ds \approx y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, y^j)\, ds =: y^j$$

Oder mit der Mittelpunktsregel

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s)\, ds \approx hg(t_j + \frac{h}{2})$$

Der Wert

$$g(t_j + \frac{h}{2}) = f(t_j + \frac{h}{2}, \tilde{y}(t_j + \frac{h}{2}))$$

ist nicht bekannt. Diesen Wert kann man aber durch $f(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}})$ mit $y^{j+\frac{1}{2}} := y^j + \frac{h}{2} f(t_j, y^j)$ annähern.

Einfache Einschrittverfahren

Verbessertes Euler-Verfahren

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $j = 0, \ldots, n-1$:

$$t_{j+1} = t_j + h$$

$$y^{j+\frac{1}{2}} = y^j + \frac{h}{2} f(t_j, y^j)$$

$$y^{j+1} = y^j + h f(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}})$$

Einfache Einschrittverfahren

Verbessertes Euler-Verfahren

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $j = 0, \ldots, n-1$:

$$t_{j+1} = t_j + h$$
$$y^{j+\frac{1}{2}} = y^j + \frac{h}{2} f(t_j, y^j)$$
$$y^{j+1} = y^j + hf(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}})$$

Trapezmethode (implizit!)

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $j = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} t_{j+1} &= t_j + h \\ y^{j+1} &= y^j + \frac{h}{2}(f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})) \end{aligned}$$

Beispiel 11.21

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t) - 2\sin t, \quad t \in [0,4], \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Lösung: $y(t) = \sin t + \cos t$

- Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} y^{j+1} &= y^j + hf(t_j, y^j) \\ &= y^j + h(y^j - 2\sin t_j) = (1+h)y^j - 2h\sin t_j \end{aligned}$$

- Verbessertes Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} y^{j+1} &= y^j + hf(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}}) \\ &= y^j + h(y^{j+\frac{1}{2}} - 2\sin(t_j + \frac{h}{2})) \\ &= (1 + h + \frac{1}{2}h^2)y^j - 2h\sin(t_j + \frac{h}{2}) - h^2 \sin t_j. \end{aligned}$$

Beispiel 11.21

- Trapezmethode:

$$
\begin{aligned}
y^{j+1} &= y^j + \frac{h}{2}(f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})) \\
&= (1 + \frac{h}{2})y^j + \frac{h}{2}y^{j+1} - h(\sin t_j + \sin t_{j+1}).
\end{aligned}
$$

In diesem einfachen Fall kann man die implizite Gleichung für y^{j+1} in eine explizite umschreiben:

$$
y^{j+1} = \frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}} y^j - \frac{h}{1 - \frac{h}{2}}(\sin t_j + \sin t_{j+1}).
$$

Beispiel 11.21

Euler-Verfahren

h	$\lvert y^{1/h} - y(1)\rvert$	$\lvert y^{2/h} - y(2)\rvert$	$\lvert y^{4/h} - y(4)\rvert$
2^{-4}	0.0647	0.2271	1.5101
2^{-5}	0.0332	0.1176	0.8063
2^{-6}	0.0168	0.0599	0.4170
2^{-7}	0.0085	0.0302	0.2121

Verbessertes Euler-Verfahren

h	$\lvert y^{1/h} - y(1)\rvert$	$\lvert y^{2/h} - y(2)\rvert$	$\lvert y^{4/h} - y(4)\rvert$
2^{-4}	0.001155	0.003824	0.025969
2^{-5}	0.000294	0.000973	0.006606
2^{-6}	0.000074	0.000245	0.001665
2^{-7}	0.000019	0.000062	0.000418

Trapezmethode

h	$\lvert y^{1/h} - y(1)\rvert$	$\lvert y^{2/h} - y(2)\rvert$	$\lvert y^{4/h} - y(4)\rvert$
2^{-4}	0.0002739	0.0002956	0.0002493
2^{-5}	0.0000685	0.0000740	0.0000618
2^{-6}	0.0000171	0.0000185	0.0000154
2^{-7}	0.0000043	0.0000046	0.0000039

Beispiel 11.22

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 - y_2 \\ 2y_1 - 2y_2 + 3\sin t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0), \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

Beispiel 11.22

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 - y_2 \\ 2y_1 - 2y_2 + 3\sin t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0), \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

Verbessertes Euler-Verfahren

$$\begin{pmatrix} y_1^{j+\frac{1}{2}} \\ y_2^{j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1^j - y_2^j \\ 2y_1^j - 2y_2^j + 3\sin(jh) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1^{j+1} \\ y_2^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1^{j+\frac{1}{2}} - y_2^{j+\frac{1}{2}} \\ 2y_1^{j+\frac{1}{2}} - 2y_2^{j+\frac{1}{2}} + 3\sin((j+\frac{1}{2})h) \end{pmatrix}$$

Beispiel 11.22

Fehler:

$$\|y^n - y(T)\|_\infty := \max\{\left|y_1^n - y_1(T)\right|, \left|y_2^n - y_2(T)\right|\}$$

Resultate:

h	$\|y^{1/h} - y(1)\|_\infty$	$\|y^{2/h} - y(2)\|_\infty$	$\|y^{4/h} - y(4)\|_\infty$
2^{-4}	0.000749	0.002048	0.001140
2^{-5}	0.000188	0.000507	0.000289
2^{-6}	0.000047	0.000126	0.000073
2^{-7}	0.000012	0.000031	0.000018

Zusammenfassung

- Der Satz von Picard-Lindelöf liefert hinreichende Bedingungen für Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung eines Anfangswertproblems.
- Eine gewöhnliche Differentialgleichung kann man als Integralgleichung umformulieren.
- Über eine einfache Transformation kann man eine skalares Anfangswertproblem m-ter Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung umformulieren.
- Das explizite/implizite Euler-Verfahren, die Trapezmethode und das verbesserte Euler-Verfahren sind Beispiele einfacher Einschrittverfahren niedriger Ordnung. Das implizite Euler-Verfahren und die Trapezmethode sind implizite Verfahren; die beiden anderen sind explizit.