Veranstaltung Titel

Vortragender

Assistenten

Institut XXX

Wintersemester/Sommersemester xyz

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 2.3-2.4

- Grundlagen: Normen und Taylor-Entwicklung
- Kondition eines Problems

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 2.3-2.4

- Grundlagen: Normen und Taylor-Entwicklung
- Kondition eines Problems

Was Sie mitnehmen sollten:

- Grundbegriffe: Normen, Taylor-Entwicklung
- Was ist die (relative) Kondition eines Problems?
- Wie wird Kondition eines Problems berechnet?
- Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

Vektornormen

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$ wird eine Norm definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Speziell:

- 1-Norm: $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Vektornormen

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$ wird eine Norm definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Speziell:

- 1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- ∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

Vektornormen

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$ wird eine Norm definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Speziell:

- 1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- ∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$
- 2-Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (Euklidische Norm)

  Bemerkung: 2-Norm wird durch ein Skalarprodukt induziert.

Weitere Beispiele

"Endlich-dimensionaler Vektorraum" beinhaltet nicht nur $\mathbb{R}^n$:

Beispiel

Die Menge

$$\Pi_m := \left\{ \sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $m + 1$.

Die Monome $M_i(t) := t^i,\ i = 0, \ldots, m,$ dienen als Basis.

Weitere Beispiele

"Endlich-dimensionaler Vektorraum" beinhaltet nicht nur $\mathbb{R}^n$:

Beispiel

Die Menge

$$\Pi_m := \left\{ \sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $m+1$.

Die Monome $M_i(t) := t^i,\ i = 0, \ldots, m$, dienen als Basis.

Unendlich-dimensionaler Vektorraum:
$V = C^0(I),\ I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, mit Norm

$$\|f\|_p = \left(\int^{b} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Satz 2.10

Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_{**}$ existieren beschränkte, positive Konstanten c und C, so dass

$$c\|v\|_* \leq \|v\|_{**} \leq C\|v\|_*, \quad \text{für alle } v \in V$$

Satz 2.10

Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_{**}$ existieren beschränkte, positive Konstanten c und C, so dass

$$c\|v\|_* \leq \|v\|_{**} \leq C\|v\|_*, \quad \text{für alle } v \in V$$

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

und

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Lineare Abbildungen und Operatornormen

$\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$: lineare normierte Räume (über $\mathbb{R}$) mit Normen $\|\cdot\|_{\boldsymbol{X}}$, $\|\cdot\|_{\boldsymbol{Y}}$. Eine Abbildung $\boldsymbol{\mathcal{L}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ heißt linear, falls für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\beta z}) = \boldsymbol{\alpha \mathcal{L}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\beta \mathcal{L}}(\boldsymbol{z})$$

Beispiel

Eine Matrix $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{i,j})_{i,j=1}^{m,n} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_{i,j} \in \mathbb{R},$$

entspricht der Abbildung $\boldsymbol{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{Bx} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{b}_j$, mit $\boldsymbol{b}_j$ die $\boldsymbol{j}$-te Spalte der Matrix $\boldsymbol{B}$.

Lineare Abbildungen und Operatornormen

Beispiel

$\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^{m+1}$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Pi}_m$ mit Basis $\{\phi_0, \dots, \phi_m\}$.

$$\mathcal{L}(a) := \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i, \quad a \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Lineare Abbildungen und Operatornormen

Beispiel

$X = \mathbb{R}^{m+1}$, $Y = \Pi_m$ mit Basis $\{\phi_0, \ldots, \phi_m\}$.

$$\mathcal{L}(a) := \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i, \quad a \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Operatornorm

Sei $\mathcal{L} : X \to Y$ eine lineare Abbildung.

$$\|\mathcal{L}\|_{X \to Y} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

Wichtige Eigenschaft:

$$\|\mathcal{L}(x)\|_Y \leq \|\mathcal{L}\|_{X \to Y} \|x\|_X, \quad \text{für all} \quad x \in X$$

Matrixnormen

Lineare Abbildung in Form einer Matrix, dann Matrixnorm:=Operatornorm.

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert.

Beachte

Definition gilt entsprechend auch für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Die induzierte Matrixnorm $\|A\|$ ist die kleinste Zahl c, so dass gilt

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Matrixnormen

Lineare Abbildung in Form einer Matrix, dann Matrixnorm:=Operatornorm.

Definition

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert.

Es gilt:

- $\|\boldsymbol{A}\| \geq \boldsymbol{0}$, und $\|\boldsymbol{A}\| = \boldsymbol{0}$ nur wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.
- Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha\, \boldsymbol{A}\| = |\alpha|\, \|\boldsymbol{A}\|$
- Dreiecksungleichung:

$$\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$$

Matrixnormen

Lineare Abbildung in Form einer Matrix, dann Matrixnorm:=Operatornorm.

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert.

und:

- $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$
- $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$
- $\|I\| = 1$

Matrixnormen

Aus der Definition ergeben sich folgende Formeln für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- 1-Norm: (max. Spaltensumme)
$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Matrixnormen

Aus der Definition ergeben sich folgende Formeln für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- 1-Norm: (max. Spaltensumme)

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

- ∞-Norm: (max. Zeilensumme)

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Matrixnormen

Aus der Definition ergeben sich folgende Formeln für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

- 1-Norm: (max. Spaltensumme)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

- ∞-Norm: (max. Zeilensumme)

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 2-Norm: (Spektralnorm)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Matrixnormen

Beispiel

Für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ergibt sich:

Matrixnormen

Beispiel

Für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = 4, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 5, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + 5\sqrt{5}\right)},$$

Matrixnormen

Beispiel

Für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = 4, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = \mathbf{5}, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{15} + \mathbf{5}\sqrt{\mathbf{5}}\right)},$$

denn die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$ kann man über

$$\det(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0} \iff (\mathbf{5} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{10} - \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{25} = \mathbf{0}$$

bestimmen und damit

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{15} - \mathbf{5}\sqrt{\mathbf{5}}\right), \qquad \boldsymbol{\lambda}_2 = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{15} + \mathbf{5}\sqrt{\mathbf{5}}\right).$$

Landau-Symbol

Landau-Symbol $\mathcal{O}$

Betrachte zwei Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir verwenden die Notation

$$g(x) = \mathcal{O}\left(h(x)\right) \qquad (x \to x_0)$$

wenn es Konstanten $C > 0$ und $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|g(x)| \leq C|h(x)|, \qquad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

- Anschauliche Bedeutung
  g wächst nicht wesentlich schneller als h (in einer Umgebung von x_0)
- Definition gilt entsprechend auch für $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Entwicklung (von f um x_0)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

wobei ξ eine Zahl zwischen x und x_0 ist.

$f^{(n)}(x_0)$ ist die n-te Ableitung von f an der Stelle x_0.

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Polynom vom Grad $k-1$ in x_0

$$\begin{aligned} p_{k-1}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}. \end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Polynom vom Grad $k-1$ in x_0

$$p_{k-1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1}.$$

- Für $k = 1$ erhält man den Mittelwertsatz
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi),$$
wobei ξ eine Zahl zwischen x und x_0 ist.
- Oft verwendete Darstellung
$$f(x) = p_{k-1}(x) + \mathcal{O}(|x - x_0|^k) \qquad (x \to x_0)$$

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Polynom vom Grad $k-1$ in x_0

$$p_{k-1}(x) \;=\; f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}.$$

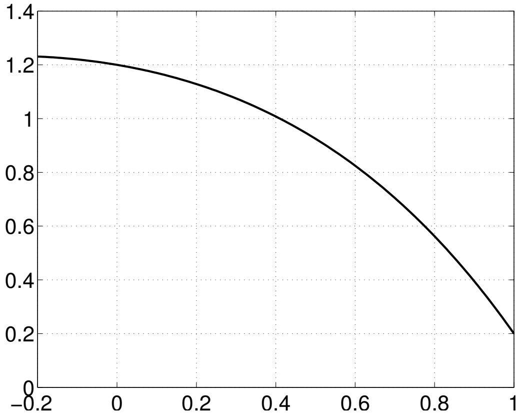
- Für $k=1$ erhält man den Mittelwertsatz
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi),$$
wobei ξ eine Zahl zwischen x und x_0 ist.
- Oft verwendete Darstellung
$$f(x)=p_{k-1}(x)+\mathcal{O}(|x-x_0|^k) \qquad (x\to x_0)$$

Siehe auch Matlab-Demo 2.23.

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Reihenentwicklung 0. , 1. und 2. Ordnung um $\boldsymbol{x_0 = 0}$ von

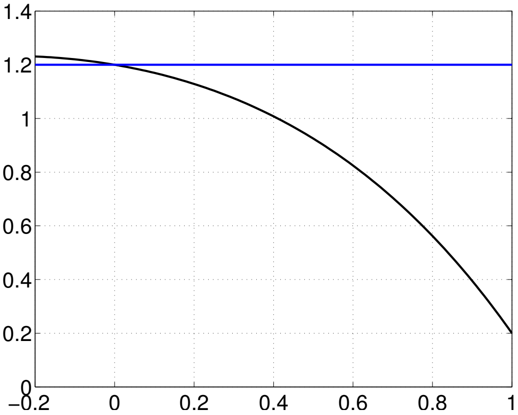
$$\boldsymbol{f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2}$$



Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Reihenentwicklung 0. , 1. und 2. Ordnung um $x_0 = 0$ von

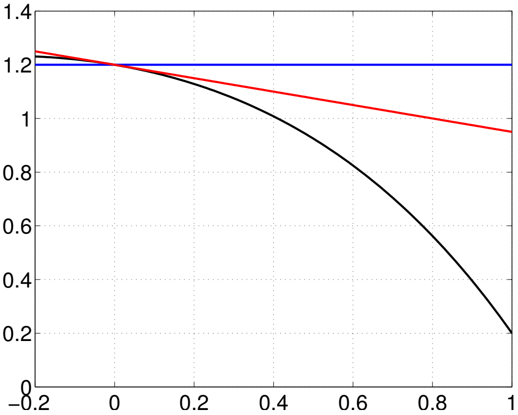
$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$



Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Reihenentwicklung 0. , 1. und 2. Ordnung um $x_0 = 0$ von

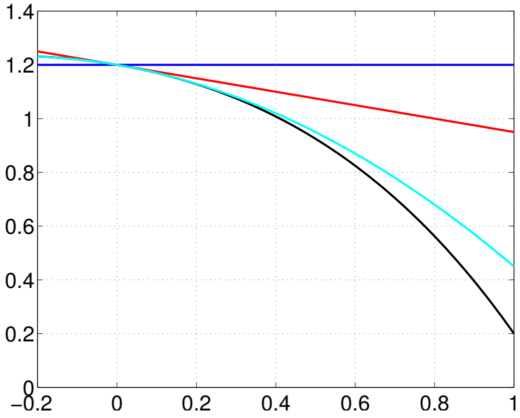
$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$



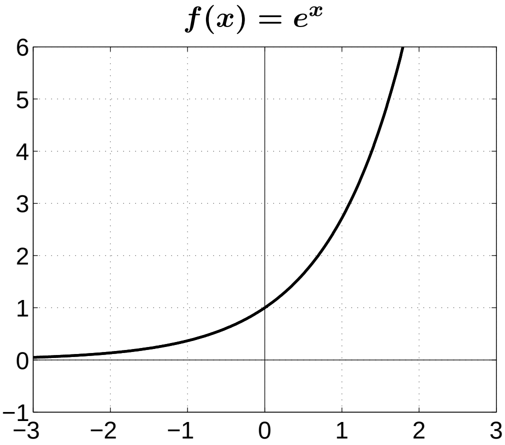
Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Reihenentwicklung 0., 1. und 2. Ordnung um $\boldsymbol{x_0 = 0}$ von

$$\boldsymbol{f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2}$$

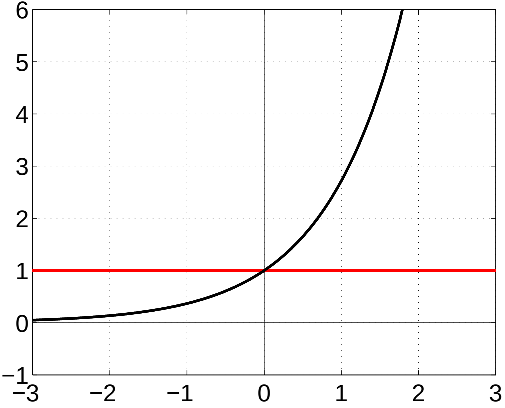


Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen



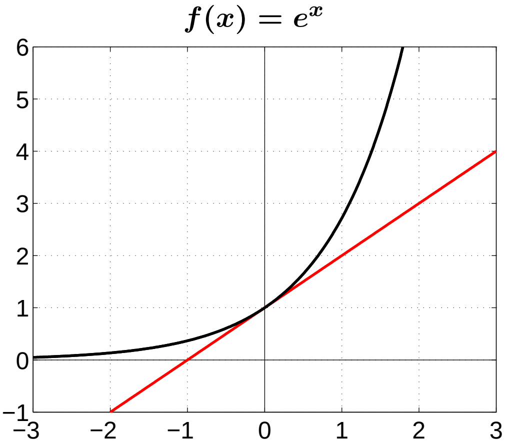
Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

$$f(x) = e^x$$



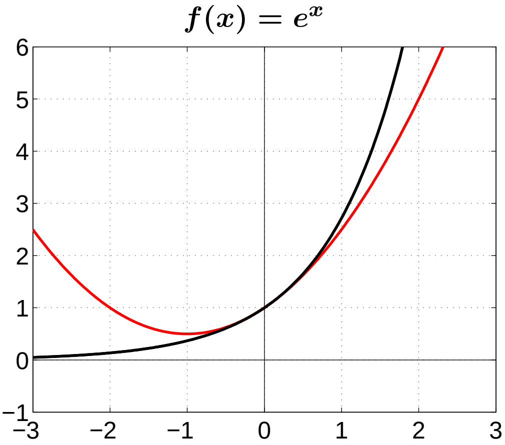
Taylor-Pol. 0. Grades in 0: $p_0(x) = 1$

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen



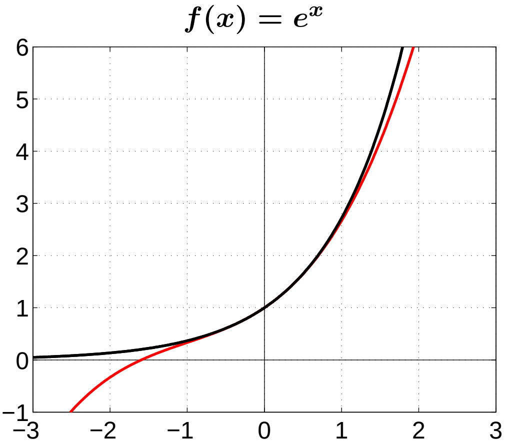
Taylor-Pol. 1. Grades in 0: $p_1(x) = 1 + x$

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen



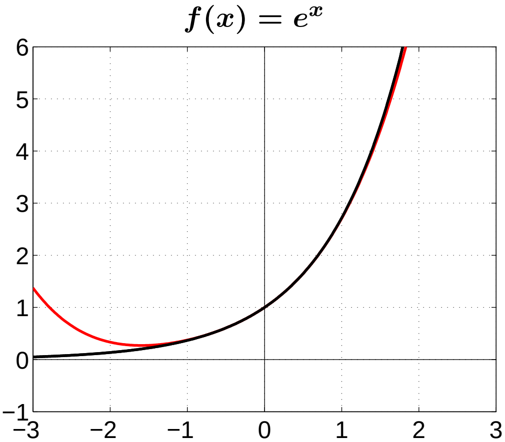
Taylor-Pol. 2. Grades in 0: $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen



Taylor-Pol. 3. Grades in 0: $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

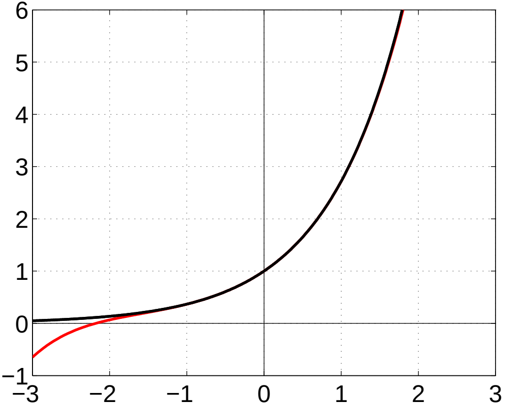
Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen



Taylor-Pol. 4. Grades in 0: $p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

$f(x) = e^x$



Taylor-Pol. 5. Grades in 0: $p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$

Taylor-Entwicklung: Vektorwertige Funktionen

Taylor-Entwicklung (von f um x)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} (\tilde{x}_j - x_j) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} (\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_j - x_j) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung: Vektorwertige Funktionen

Taylor-Entwicklung (von f um x)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} (\tilde{x}_j - x_j) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} (\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_j - x_j) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

- Gradient: $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$
- Hesse-Matrix: $f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$

Taylor-Entwicklung: Vektorwertige Funktionen

Kompakte Schreibweise

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + \left(\nabla f(x)\right)^T (\tilde{x} - x) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\tilde{x} - x)^T f''(x)(\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

oder

$$f(\tilde{x}) = f(x) + \left(\nabla f(x)\right)^T (\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^2).$$

Falls $\|\tilde{x} - x\| \ll 1$:

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + \left(\nabla f(x)\right)^T (\tilde{x} - x)$$

$\doteq$: Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt.

Fehlerquellen

Fehler im Resultat auf Grund von

- Datenfehlern (oder Eingabefehlern)

  $\Rightarrow$ Kondition eines Problems

  – können häufig nicht vermieden werden

Fehlerquellen

Fehler im Resultat auf Grund von

- Datenfehlern (oder Eingabefehlern)

  $\Rightarrow$ Kondition eines Problems

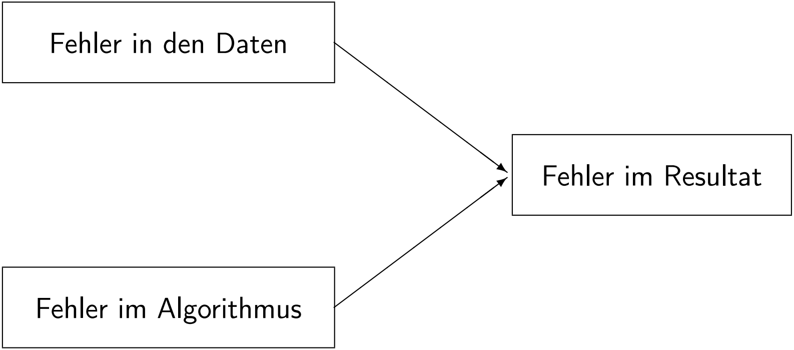
  – können häufig nicht vermieden werden

- Fehler(akkumulation) im Algorithmus (z.B. Rundungsfehler)

  $\Rightarrow$ Stabilität eines Algorithmus

  – kann man beeinflussen durch Anpassung des Verfahrens

Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität



Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

Konzept der Kondition eines Problems

Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

Konzept der Kondition eines Problems

Beachte: Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

Konzept der Kondition eines Problems

Beachte: Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Wir fassen den "mathematischen Prozess" oder das "Problem" als Aufgabe auf, eine gegebene Funktion

$$f : X \to Y$$

an einer Stelle $x \in X$ auszuwerten.

Elementare Beispiele

- Die Berechnung der Multiplikation von x_1 und x_2:

$$f(x_1, x_2) = x_1\, x_2$$

und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.

Elementare Beispiele

- Die Berechnung der Multiplikation von $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$:

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2) = x_1\, x_2}$$

und $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}$.

- Die Berechnung der Summe von $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$:

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2) = x_1 + x_2}$$

und $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}$.

Elementare Beispiele

- Man bestimme die kleinere Nullstelle der Gleichung

$$y^2 - 2\,x_1\,y + x_2 = 0,$$

mit $x_1^2 > x_2$. Die Lösung y^* ist

$$y^* = f(x_1, x_2) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}.$$

mit

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 > x_2\right\},$$

$$Y = \mathbb{R}.$$

Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 = x_1\} \\
G_2 &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 = x_2\}
\end{aligned}
$$

wobei $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $a_{i,j}$ gegeben seien.

Mit

$$
A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}
$$

ergibt sich

$$
Ay = x.
$$

Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden: (Fortsetzung)

Es gilt also

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

Annahme: $\det \boldsymbol{A} \neq 0$
Dann ist $\boldsymbol{y}$ durch

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

gegeben. Also Auswertung der Funktion

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x},$$

d.h. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^2$.

Begriff der Kondition

Ungestörtes Problem

$$\underbrace{x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozess}}} \underbrace{y = f(x)}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

Begriff der Kondition

Ungestörtes Problem

$$\underbrace{x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozess}}} \underbrace{y = f(x)}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

Gestörtes Problem

$$\tilde{x} = x + \Delta x \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozess}}} \tilde{y} = f(\tilde{x})$$

mit Eingabefehler $\Delta x = \tilde{x} - x$

Ausgabefehler $\Delta y = \tilde{y} - y = f(\tilde{x}) - f(x)$

Begriff der Kondition

Ungestörtes Problem

$$\underbrace{x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozess}}} \underbrace{y = f(x)}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

Gestörtes Problem

$$\tilde{x} = x + \Delta x \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozess}}} \tilde{y} = f(\tilde{x})$$

mit Eingabefehler $\Delta x = \tilde{x} - x$

Ausgabefehler $\Delta y = \tilde{y} - y = f(\tilde{x}) - f(x)$

Ziel: Verhältnis Ausgabefehler Δy zu Eingabefehler Δx.

Begriff der Kondition

Arten von Fehlern

- absoluter Eingabefehler: $\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}$
- absoluter Ausgabefehler: $\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}$
- relativer Eingabefehler: $\boldsymbol{\delta_x} = \dfrac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}}}$
- relativer Ausgabefehler: $\boldsymbol{\delta_y} = \dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{Y}}}$

Begriff der Kondition

Definition

Mit der relativen Kondition eines (durch f beschriebenen) Problems bezeichnet man das Verhältnis

$$\frac{\delta_y}{\delta_x}$$

des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

Begriff der Kondition

Definition

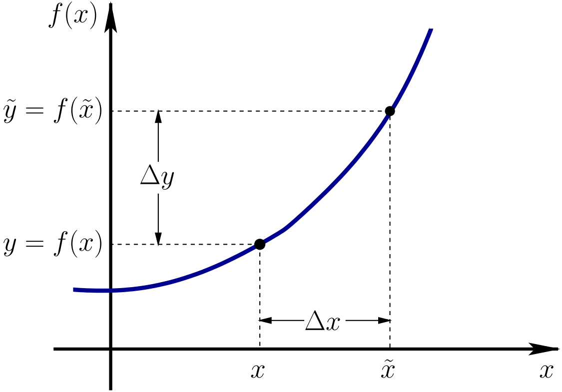
Mit der relativen Kondition eines (durch f beschriebenen) Problems bezeichnet man das Verhältnis

$$\frac{\delta_y}{\delta_x}$$

des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

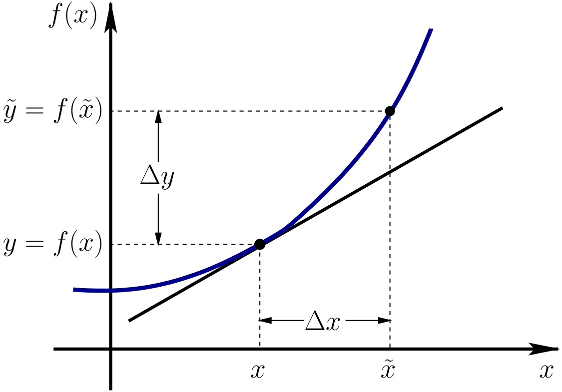
- Absolute Kondition: Verhältnis $\frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X}$
- Mit Kondition wird meistens die relative Kondition gemeint.
- Ein Problem ist umso besser konditioniert, je kleinere Schranken für δ_y/δ_x (mit $\delta_x \to 0$) existieren.

Taylorentwicklung 1. Ordnung



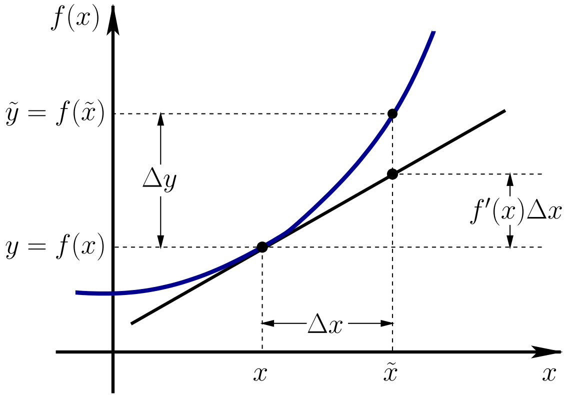
Relative / absolute Kondition: Verhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$ bzw. $\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$.

Taylorentwicklung 1. Ordnung



Relative / absolute Kondition: Verhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$ bzw. $\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$.

Taylorentwicklung 1. Ordnung



Relative / absolute Kondition: Verhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$ bzw. $\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$.

Kondition: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Taylor-Entwicklung 1. Ordnung von f um festes x

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x)$$

Daraus erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Skalar, Ausgabe: Skalar)

Kondition: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Taylor-Entwicklung 1. Ordnung von f um festes x

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x)$$

Daraus erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Eingabe: Skalar, Ausgabe: Skalar)

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \doteq \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$$

mit

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) := \left|f'(x)\frac{x}{f(x)}\right|$$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylor-Reihenentwicklung 1. Ordnung

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T \cdot (\tilde{x} - x)$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylor-Reihenentwicklung 1. Ordnung

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T \cdot (\tilde{x} - x)$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Hieraus folgt

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)} \right) \cdot \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}$$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Mit den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

erhält man

$$\underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\substack{\text{relativer Fehler}\\ \text{der Ausgabe}}} \doteq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\phi_j(x)}_{\substack{\text{Fehler-}\\ \text{verstärkung}}} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}}_{\substack{\text{relativer Fehler}\\ \text{der Eingabe in } x_j}}$$

Kondition $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Skalar)

Kondition $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Skalar)

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \dot{\leq} \kappa_{\text{rel}}(x) \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}\right|$$

mit

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \kappa_{\text{rel}}^{\infty}(x) := \max_j |\phi_j(x)|$$

und den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

wobei $\dot{\leq}$ entsprechend $\doteq$ zu verstehen ist.

Beispiel 2.26.

Gegeben sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Relative Konditionszahl:

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\,x^2.$$

$\rightsquigarrow$ für $|x|$ klein/groß ist f gut/schlecht konditioniert.

Beispiel 2.26.

Gegeben sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Relative Konditionszahl:

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\,x^2.$$

$\rightsquigarrow$ für $|x|$ klein/groß ist f gut/schlecht konditioniert.

Beispiel

- $x = 0.1,\ \tilde{x} = 0.10001$: $\kappa_{\text{rel}}(0.1) = 6 \cdot 10^{-2}$

$$\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 6.03 \cdot 10^{-6}$$

Beispiel 2.26.

Gegeben sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Relative Konditionszahl:

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\,x^2.$$

$\rightsquigarrow$ für $|x|$ klein/groß ist f gut/schlecht konditioniert.

Beispiel

- $x = 0.1,\ \tilde{x} = 0.10001$: $\kappa_{\text{rel}}(0.1) = 6 \cdot 10^{-2}$

$$\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 6.03 \cdot 10^{-6}$$

- $x = 4,\ \tilde{x} = 4.0004$: $\kappa_{\text{rel}}(4) = 96$

$$\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 9.65 \cdot 10^{-3}$$

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1\, x_2$

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 \, x_2$

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = 1 \text{ (von } x \text{ unabhängig!)}$$

Multiplikation für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
Ein ähnliches Resultat gilt für die Division.

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1\, x_2$

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = 1 \text{ (von } x \text{ unabhängig!)}$$

  Multiplikation für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
  Ein ähnliches Resultat gilt für die Division.

- Addition: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 + x_2$

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1\, x_2$

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = 1 \text{ (von } x \text{ unabhängig!)}$$

  Multiplikation für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
  Ein ähnliches Resultat gilt für die Division.

- Addition: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 + x_2$

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \max\left\{ \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right|, \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \right\}$$

  Bei zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen: $\kappa_{\text{rel}} \leq 1$.

  ABER: $\kappa_{\text{rel}}(x) \gg 1$ wenn $x_1 \approx -x_2$.

Beispiel 2.29 (Nullstelle)

Bestimmung der kleineren Nullstelle y^* von $y^2 - 2x_1 y + x_2 = 0$:

$$x = (x_1, x_2)^T, \qquad y^* = f(x) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}$$

- Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2} - x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} = \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

- Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

Beispiel 2.29 (Nullstelle)

- Verstärkungsfaktoren

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_1}{y^*} = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_2}{y^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi_1(x)\end{aligned}$$

- Kondition: $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \max_j |\phi_j(x)|$

Beispiel 2.29 (Nullstelle)

- Verstärkungsfaktoren

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_1}{y^*} = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_2}{y^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi_1(x)\end{aligned}$$

- Kondition: $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \max_j |\phi_j(x)|$

Kondition hängt stark von der Stelle (x_1, x_2) ab:

Beispiel 2.29 (Nullstelle)

- Verstärkungsfaktoren

$$\phi_1(x) = \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_1}{y^*} = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_2}{y^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi_1(x)$$

- Kondition: $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \max_j |\phi_j(x)|$

Kondition hängt stark von der Stelle (x_1, x_2) ab:

- Wenn $x_2 < 0$: $|\phi_1(x)| \leq 1$ und $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) \leq 1$
- Wenn $x_2 \approx x_1^2$: $|\phi_1(x)| \gg 1$ und $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) \gg 1$

Zusammenfassung

Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Zusammenfassung

Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Frage:

- Was ist die (relative) Kondition eines Problems?

$\Rightarrow$ Die relative Kondition eines Problems bezeichnet das Verhältnis des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

Zusammenfassung

Wie wird die Kondition analysiert?

- Wir haben folgende Fälle betrachtet
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Wie wird die Kondition analysiert?

- Wir haben folgende Fälle betrachtet
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

- Multiplikation und Division sind für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
- Addition ist
  - gut konditioniert, wenn beide Zahlen das gleiche Vorzeichen haben;
  - sehr schlecht konditioniert, wenn $x_1 \approx -x_2$.