Veranstaltung Titel

Vortragender

Assistenten

Institut XXX

Wintersemester/Sommersemester xyz

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 3.1-3.4

- Lineare Gleichungssysteme: Beispiele, Problemstellung
- Kondition und Störungssätze
- Zeilenskalierung
- Dreiecksmatrizen

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 3.1-3.4

- Lineare Gleichungssysteme: Beispiele, Problemstellung
- Kondition und Störungssätze
- Zeilenskalierung
- Dreiecksmatrizen

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie ist das Problem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ konditioniert?
- Warum verwendet man Zeilenskalierung?
- Wie rechnet man mit Dreiecksmatrizen?

Motivation

Problemstellungen (Auswahl)

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen.

Motivation

Problemstellungen (Auswahl)

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen.
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (Normalgleichungen, siehe nächstes Kapitel).

Motivation

Problemstellungen (Auswahl)

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen.
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (Normalgleichungen, siehe nächstes Kapitel).
- Zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems werden oft Linearisierungsverfahren, wie z.B. das Newton-Verfahren, eingesetzt. Bei so einem Verfahren ergibt sich eine Reihe von linearen Gleichungssystemen (siehe übernächstes Kapitel).

Motivation

Problemstellungen (Auswahl)

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen.
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (Normalgleichungen, siehe nächstes Kapitel).
- Zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems werden oft Linearisierungsverfahren, wie z.B. das Newton-Verfahren, eingesetzt. Bei so einem Verfahren ergibt sich eine Reihe von linearen Gleichungssystemen (siehe übernächstes Kapitel).

Wahl des Lösungsverfahrens hängt vom Problem ab

- dünnbesetztes vs. vollbesetztes Gleichungssystem
- Strukur (Tridiagonal-, Bandmatrizen)

Beispiel 3.6

Gesucht $u(x)$, das eine Differentialgleichung vom Typ

$$-u''(x) + \lambda(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1],$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllt (Randwertaufgabe).

Beispiel 3.6

Gesucht $u(x)$, das eine Differentialgleichung vom Typ

$$-u''(x) + \lambda(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllt (Randwertaufgabe).

Diskretisierung (Gitterpunkte)

$$x_j = jh, \quad j = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n},$$

Beispiel 3.6

Ableitung → Differenzenquotienten (Taylorentwicklung)

$$u(x_j+h) = u(x_j)+hu'(x_j)+\frac{h^2}{2}u''(x_j)+\frac{h^3}{6}u'''(x_j)+\mathcal{O}(h^4),$$

$$u(x_j-h) = u(x_j)-hu'(x_j)+\frac{h^2}{2}u''(x_j)-\frac{h^3}{6}u'''(x_j)+\mathcal{O}(h^4),$$

Daraus folgt sofort

$$u(x_j+h) - 2u(x_j) + u(x_j-h) = h^2 u''(x_j) + \mathcal{O}(h^4),$$

Beispiel 3.6

Es gilt also

$$u(x_j + h) - 2u(x_j) + u(x_j - h) = h^2 u''(x_j) + \mathcal{O}(h^4),$$

und somit

$$u''(x_j) = \frac{1}{h^2}\left[u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})\right] + \mathcal{O}(h^2).$$

D.h., bis auf Terme 2. Ordnung in der Schrittweite h entspricht die 2. Ableitung einem **Differenzenquotienten**.

Beispiel 3.6

Diskretisierung:

$$-\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2}+\lambda(x_j)u_j=f(x_j),\quad j=1,\ldots,n-1,$$

zusammen mit den Randbedingungen $u_0=u_n=0$.

Für kleines h, also großes n:

$$u_j \approx u(x_j).$$

Beispiel 3.6

Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_{2,2} & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$a_{i,i} := 2 + h^2 \lambda(x_i)$$
$$f_i := h^2 f(x_i)$$

Beispiel 3.7

Gesucht $u(x)$, das die Integralgleichung

$$\boldsymbol{u(x) + 2\int_0^1 \cos(xt)u(t)dt = 2, \quad x \in [0,1]}$$

erfüllt.

Beispiel 3.7

Gesucht $u(x)$, das die Integralgleichung

$$u(x) + 2\int_0^1 \cos(xt)u(t)dt = 2, \quad x \in [0,1]$$

erfüllt.

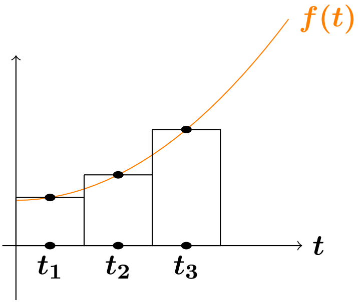
Diskretisierung (Gitterpunkte)

$$t_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)h, \quad j = 1, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n}.$$

Beispiel 3.7

Annäherung des Integrals (Mittelpunktsregel):

$$\int_0^1 f(t)dt \approx h \sum_{j=1}^{n} f(t_j)$$



Beispiel 3.7

Gleichung nur in den Punkten $x = t_i$ betrachten.

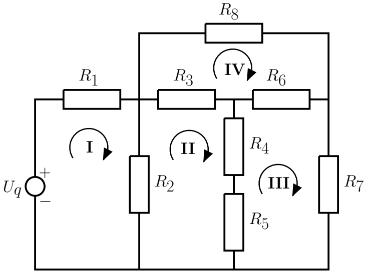
Gleichungssystem für $u_i \approx u(t_i)$:

$$u_i + 2h \sum_{j=1}^{n} \cos(t_i t_j) u_j = 2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

In Matrixform ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2h} + \cos(t_1 t_1) & \cos(t_1 t_2) & \cdots & \cos(t_1 t_n) \\ \cos(t_2 t_1) & \frac{1}{2h} + \cos(t_2 t_2) & & \cos(t_2 t_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cos(t_1 t_n) & \cdots & & \frac{1}{2h} + \cos(t_n t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Netzwerkanalyse

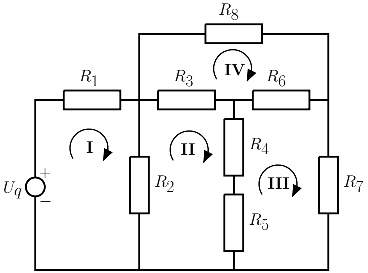


Kirchhoffsche Gesetze:

1. "Maschenregel"
$$\sum_k U_k = 0$$
2. "Knotenregel"
$$\sum_k I_k = 0$$

Sei $\hat{I}_k$ der Strom durch R_k, $k = 1, 3, 7, 8$,
$I_1 := \hat{I}_1$, $I_2 := \hat{I}_3 + \hat{I}_8$, $I_3 := \hat{I}_7$, $I_4 := \hat{I}_8$. Es gilt

$$\begin{aligned}
R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) &= U_q \\
R_2(I_2 - I_1) + R_3(I_2 - I_4) + (R_4 + R_5)(I_2 - I_3) &= 0 \\
(R_4 + R_5)(I_3 - I_2) + R_6(I_3 - I_4) + R_7 I_3 &= 0 \\
R_3(I_4 - I_2) + R_8 I_4 + R_6(I_4 - I_3) &= 0
\end{aligned}$$



Kirchhoffsche Gesetze:

1. "Maschenregel"

$$\sum_k U_k = 0$$

2. "Knotenregel"

$$\sum_k I_k = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4+R_5 & -R_4-R_5 & -R_3 \\ 0 & -R_4-R_5 & R_4+R_5+R_6+R_7 & -R_6 \\ 0 & -R_3 & -R_6 & R_3+R_6+R_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Lineares Gleichungssystem: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
- Hier Sonderfall: $\boldsymbol{A}$ symmetrisch, d.h. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$
  (tritt häufig bei Modellierung physikalischer Systeme auf!)

Problemstellung

Notation:

$\mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Menge der $(m \times n)$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit Einträgen

$$a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Problemstellung

Aufgabe

Zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ bestimme ein

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

so dass

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}\,x_n & = & b_n \end{array}$$

bzw. kurz

$$Ax = b$$

erfüllt.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$:

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
- Es gilt $\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang n.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
- Es gilt $\mathbf{det}\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

$\boldsymbol{A}$ heißt regulär oder nichtsingulär, wenn $\mathbf{det}\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

Annahme: Wir nehmen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme stets an, dass $\mathbf{det}\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ gilt.

Störung in der rechten Seite $\boldsymbol{b}$

Satz 3.10

Seien $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}$. Dann gilt:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \underbrace{\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \, \|\boldsymbol{A}\|}_{\kappa_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})} \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

wobei

$$\kappa_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \, \|\boldsymbol{A}\|$$

die (relative) Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}$ (bzgl. $\|\cdot\|$) ist.

Störung in der rechten Seite $\boldsymbol{b}$

Satz 3.10

Seien $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}$. Dann gilt:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \underbrace{\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|}_{\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})} \; \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

wobei

$$\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|$$

die (relative) Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}$ (bzgl. $\|\cdot\|$) ist.

Der relative Fehler der Lösung läßt sich durch das Vielfache

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$$

des relativen Fehlers der rechten Seite (Eingabedaten) abschätzen.

Störung in $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$

Satz 3.12

Sie $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Delta A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}.$$

Falls $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ und

$$\kappa(\boldsymbol{A}) \frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} < 1$$

gilt, folgt für den relativen Fehler

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\kappa(\boldsymbol{A})}{1 - \kappa(\boldsymbol{A}) \frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} + \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \right).$$

Störung in $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$

Beachte

Falls

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\Delta A}\| \ll \mathbf{1},$$

beschreibt die Konditionszahl $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})$ auch maßgeblich den Effekt der Störungen in den übrigen Eingabedaten.

Beispiel 3.14

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1.001} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.999} \\ \mathbf{4.003} \end{pmatrix},$$

sowie die gestörten Daten

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2.002} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe: Schätzen Sie den relativen Fehler in der Lösung ab.

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}$$

und damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\|A^{-1}\|_\infty = 600,\ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow\ \kappa_\infty(A) = 4798.2}.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}$$

und damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow \ \kappa_\infty(A) = 4798.2}.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}$$

und damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\|A^{-1}\|_\infty = 600,\ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow\ \kappa_\infty(A) = 4798.2}.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow \ \kappa_\infty(A) = 4798.2.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,$$

$$\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}$$

und damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\|A^{-1}\|_\infty = 600,\ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow\ \kappa_\infty(A) = 4798.2}.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

$$\boldsymbol{\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = 0.003.}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow \ \kappa_\infty(A) = 4798.2.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,$$

$$\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = 0.003.$$

3. Schritt: Aus Satz 3.12 ergibt sich

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10.49.$$

Beispiel 3.14

Mit

$$\boldsymbol{Ax = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix} = b,}$$

sowie

$$\boldsymbol{\tilde{A}\tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2229 \\ 1.3333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix} = \tilde{b}.}$$

ergibt sich der tatsächliche relative Fehler

$$\boldsymbol{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx 2.333}$$

gebenüber dem geschätzten Wert von $\mathbf{10.49}$.

Bemerkung

In einer Maschine mit Maschinengenauigkeit **eps**:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \leq \textbf{eps} \quad \text{und} \quad \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \textbf{eps}.$$

Bemerkung

In einer Maschine mit Maschinengenauigkeit **eps**:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \leq \textbf{eps} \quad \text{und} \quad \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \textbf{eps}.$$

Nach Satz 3.12 ist wegen der Kondition des Problems

$$\underbrace{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})}_{\text{Eingabe}} \to \underbrace{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}}_{\text{Ausgabe}}$$

der unvermeidliche Fehler durch

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \mathcal{O}(\kappa(\boldsymbol{A})\,\textbf{eps})$$

gegeben.

Residuum als Maß für Genauigkeit

Gegeben:

- Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- Näherungslösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Definition

Das Residuum $\tilde{\boldsymbol{r}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{r}} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Beachte

- Residuum ist ohne Kenntnis der Lösung $\boldsymbol{x}$ berechenbar
- $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

Residuum als Maß für Genauigkeit

Frage

Wie aussagekräftig ist die Größe des Residuums in Bezug auf den tatsächlichen Fehler?

Residuum als Maß für Genauigkeit

Frage

Wie aussagekräftig ist die Größe des Residuums in Bezug auf den tatsächlichen Fehler?

Für die Norm des Residuums im Vergleich zu der des Fehlers gilt:

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})^{-1}\frac{||\tilde{\boldsymbol{r}}||}{||\boldsymbol{b}||} \leq \frac{||\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}||}{||\boldsymbol{x}||} \leq \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{||\tilde{\boldsymbol{r}}||}{||\boldsymbol{b}||}$$

$\Rightarrow$ hängt wieder von der Konditionszahl ab.

Beachte

Die Größe des Residuums $||\tilde{\boldsymbol{r}}||$ kann ein schlechtes Maß für den Fehler sein, falls die Konditionszahl $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})$ groß ist.

Beispiel 3.15

Sei $\boldsymbol{b} = (\mathbf{3}, \mathbf{6})^{\boldsymbol{T}}$ und $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1.001} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{\kappa_\infty(A) = 4798.2})$.
Exakte Lösung: $\boldsymbol{x} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.99684} \\ \mathbf{0.00949} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.000045} \\ \mathbf{0.000089} \end{pmatrix},$$

gilt

Beispiel 3.15

Sei $b = (3, 6)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}$ ($\kappa_\infty(A) = 4798.2$).
Exakte Lösung: $x = (1, 0)^T$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0.99684 \\ 0.00949 \end{pmatrix}, \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} 1.000045 \\ 0.000089 \end{pmatrix},$$

gilt

$$\|\tilde{r}\|_\infty = \|b - A\tilde{x}\|_\infty = 1.95 \cdot 10^{-5},$$
$$\|\hat{r}\|_\infty = \|b - A\hat{x}\|_\infty = 4.48 \cdot 10^{-4}.$$

Die Norm des Residuums für $\tilde{x}$ ist also viel kleiner als für $\hat{x}$:

$$\|\tilde{r}\|_\infty \ll \|\hat{r}\|_\infty.$$

Beispiel 3.15

Sei $b = (3,6)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}$ ($\kappa_\infty(A) = 4798.2$).
Exakte Lösung: $x = (1,0)^T$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0.99684 \\ 0.00949 \end{pmatrix}, \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} 1.000045 \\ 0.000089 \end{pmatrix},$$

gilt

$$\|\tilde{r}\|_\infty = \|b - A\tilde{x}\|_\infty = 1.95 \cdot 10^{-5},$$
$$\|\hat{r}\|_\infty = \|b - A\hat{x}\|_\infty = 4.48 \cdot 10^{-4}.$$

Die Norm des Residuums für $\tilde{x}$ ist also viel kleiner als für $\hat{x}$:

$$\|\tilde{r}\|_\infty \ll \|\hat{r}\|_\infty.$$

Der Fehler in $\tilde{x}$ ist aber viel größer als in $\hat{x}$:

$$\|\tilde{x} - x\|_\infty = 9.49 \cdot 10^{-3} \gg \|\hat{x} - x\|_\infty = 8.90 \cdot 10^{-5}.$$

Zeilenskalierung

Forme das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ in ein äquivalentes Systems

$$\underbrace{\boldsymbol{D_z A}}\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{D_z b}}$$
$$\boldsymbol{A}_{\text{neu}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{\text{neu}}$$

um, wobei $\boldsymbol{D_z}$ die Diagonalmatrix $\boldsymbol{D_z} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{d_1, \ldots, d_n})$ bezeichnet.

Ziel: Wähle $\boldsymbol{D_z}$ so, dass die Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}_{\text{neu}}$ (wesentlich) kleiner ist als die der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Zeilenskalierung

Forme das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in ein äquivalentes Systems

$$\underbrace{\boldsymbol{D_z A}}\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{D_z b}}$$
$$\boldsymbol{A}_{\text{neu}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{\text{neu}}$$

um, wobei $\boldsymbol{D_z}$ die Diagonalmatrix $\boldsymbol{D_z} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{d_1}, \ldots, \boldsymbol{d_n})$ bezeichnet.

Ziel: Wähle $\boldsymbol{D_z}$ so, dass die Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}_{\text{neu}}$ (wesentlich) kleiner ist als die der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Sei $\boldsymbol{D_z}$ die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen definiert durch

$$\boldsymbol{d_i} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{a_{i,j}}| \right)^{-1}$$

Die Matrix $\boldsymbol{D_z A}$ nennt man (zeilen)skalierte Matrix.

Zeilenskalierung

Für die skalierte Matrix $\boldsymbol{D_z A}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |(\boldsymbol{D_z A})_{i,j}| = 1 \quad \text{für alle } i,$$

also sind die Betragssummen aller Zeilen gleich eins. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft heißt zeilenweise äquilibriert.

Zeilenskalierung

Für die skalierte Matrix $D_z A$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |(D_z A)_{i,j}| = 1 \quad \text{für alle } i,$$

also sind die Betragssummen aller Zeilen gleich eins. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft heißt zeilenweise äquilibriert.

Optimalitätseigenschaft

$\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(DA)$ für jede reguläre Diagonalmatrix D.

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung mit D_z liefert die minimale Konditionszahl bezüglich der Maximumnorm.

Insbesondere gilt $\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(A)$.

Beispiel 3.18

Für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{10000} \\ \mathbf{50} & \mathbf{-60} \end{pmatrix}$$

erhält man $\boldsymbol{\kappa}_{\infty}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{201.2}$.

Beispiel 3.18

Für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{10000} \\ \mathbf{50} & \mathbf{-60} \end{pmatrix}$$

erhält man $\boldsymbol{\kappa_\infty(A) = 201.2}$.

Mit der Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{D_z} = \begin{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad \color{blue}{10008} \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \quad \color{green}{110} \end{array}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\color{blue}{10008}} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008 \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \quad 110 \end{array}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \; 10008 \qquad \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \; 110$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$D_z A = \begin{pmatrix} 0.799 \cdot 10^{-3} & 0.999 \\ 0.455 & -0.545 \end{pmatrix}$$

und damit $\kappa_\infty(D_z A) = 3.40$.

Zeilenskalierung

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ – Zeilenskalierung $\rightarrow \boldsymbol{D_z Ax} = \boldsymbol{D_z b}$.

Beachte: Die Fehlerverstärkung bzgl. Störungen in den Daten $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ ist für die Probleme

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{D_z b}, \boldsymbol{D_z A}) \rightarrow \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{D_z A})^{-1}\boldsymbol{D_z b}$$

dieselbe, d.h.,

die Äquilibrierung lässt die Kondition des Problems selbst unverändert.

Zeilenskalierung

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ – Zeilenskalierung $\rightarrow \boldsymbol{D_z A x} = \boldsymbol{D_z b}$.

Beachte: Die Fehlerverstärkung bzgl. Störungen in den Daten $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ ist für die Probleme

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{D_z b}, \boldsymbol{D_z A}) \rightarrow \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{D_z A})^{-1}\boldsymbol{D_z b}$$

dieselbe, d.h.,

die Äquilibrierung lässt die Kondition des Problems selbst unverändert.

Weshalb dann die Äquilibrierung?

Später wird erklärt, dass die Verstärkung von Rundungsfehlern in den Lösungsverfahren direkt mit der Konditionszahl der vorliegenden Matrix zusammenhängt:

eine kleinere Konditionszahl hat einen günstigen Effekt auf die Verstärkung von Rundungsfehlern bei der Weiterverarbeitung der

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{T}\,\boldsymbol{y}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n-1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2\,n^2 - n}$ Flop

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2\,n^2 - n}$ Flop
- Matrix-Matrix Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2\,n^2 - n}$ Flop
- Matrix-Matrix Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{2\,n^3 - n^2}$ Flop

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\mathbf{2}\,\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ Flop $\mathcal{O}(\boldsymbol{n})$
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$ Flop $\mathcal{O}(\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}})$
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\mathbf{2}\,\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{n}$ Flop $\mathcal{O}(\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}})$
- Matrix-Matrix Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$: $\mathbf{2}\,\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}} - \boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$ Flop $\mathcal{O}(\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}})$

Beachte

Bei der Zählung der Rechenoperationen in einem Algorithmus werden nur Terme höchster Ordnung gezählt.

Beispiel 3.20

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ erlaubt eine einfache Lösung:

Beispiel 3.20

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ erlaubt eine einfache Lösung:

$$x_3 = 4/2 = 2$$

Beispiel 3.20

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ erlaubt eine einfache Lösung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_3} &= \mathbf{4/2} = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x_2} &= \mathbf{1 - 3 \cdot 2} = \mathbf{-5} \end{aligned}$$

Beispiel 3.20

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ erlaubt eine einfache Lösung:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4/2 = 2 \\ x_2 &= 1 - 3 \cdot 2 = -5 \\ x_1 &= \tfrac{1}{3}\big(0 - (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 2\big) = -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Rückwärtseinsetzen

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Definition

Eine Martix $R = (r_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{für } i > j$$

gilt.

Allgemeiner Fall:

$$\begin{array}{ccccccccc}
r_{1,1}\,x_1 & + & r_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & r_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & r_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & r_{2,n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & r_{n-1,n-1}\,x_{n-1} & + & r_{n-1,n}\,x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & r_{n,n},\,x_n & = & b_n
\end{array}$$

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Lösbarkeit

Da $\det R = r_{1,1} r_{2,2} \cdots r_{n,n}$ gilt, ist

$$R\,x = b$$

genau dann stets eindeutig lösbar, wenn alle Diagonaleinträge $r_{j,j}$, $j = 1, \ldots, n$, von Null verschieden sind.

Vorgehen:

- Beginnend bei der letzten Gleichung

$$x_n = b_n / r_{n,n}.$$

- Einsetzen von x_n in die zweitletzte Gleichung

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - r_{n-1,n} x_n) / r_{n-1,n-1}.$$

- ...

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Rückwärtseinsetzen

Für $j = n, n-1, \ldots, 2, 1$ berechne

$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} r_{j,k} x_k \right) \Big/ r_{j,j}$$

wobei die Summe für $j = n$ leer ist und als Null interpretiert wird.

Analog: untere Dreiecksmatrix L

- $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $l_{i,j} = 0$ für $i < j$
- Eindeutig lösbar, wenn $l_{j,j}$, $j = 1, \ldots, n$, von Null verschieden
- Vorwärtseinsetzen

Rechenaufwand

Für jedes $j = n-1, \ldots, 1$:

1. $n-j$ Multiplikationen | Additionen,
2. eine Division,
3. und für $j = n$ eine Division.

Also insgesamt:

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j) = \frac{n(n-1)}{2}$ Additionen | Multiplikationen,
- n Divisionen.

Rechenaufwand für Rückwärtseinsetzen

ca. n^2 Flop

Eigenschaften

- Das Produkt von oberen (unteren) Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- Die Inverse einer oberen (unteren) nichtsingulären Dreiecksmatrix ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gerade das Produkt aller Diagonaleinträge.
- Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind gerade die Diagonaleinträge.

Zusammenfassung

- $\kappa(A)$ spielt eine zentrale Rolle bei der Kondition des Problems $(A, b) \to x = A^{-1}b$, siehe Sätze 3.10 und 3.12.
- Residuum als Maß für die Genauigkeit: nicht immer aussagekräftig.
- Zeilenskalierung: $A \rightsquigarrow D_z A$, so daß $\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(A)$.
- Gleichungssysteme mit einer Dreiecksmatrix kann man effizient $\left(n^2 \text{ Flop}\right)$ lösen.