Veranstaltung Titel

Vortragender

Assistenten

Institut XXX

Wintersemester/Sommersemester xyz

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 5.1-5.3

- Einleitung: Problemstellung
- Kondition des Nullstellenproblems
- Fixpunktiteration
- Banachscher Fixpunktsatz

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 5.1-5.3

- Einleitung: Problemstellung
- Kondition des Nullstellenproblems
- Fixpunktiteration
- Banachscher Fixpunktsatz

Was Sie mitnehmen sollten:

- Eine schlechte Kondition bei mehrfachen Nullstellen
- Wie funktioniert die Fixpunktiteration
- Aussagen des Banachschen Fixpunktsatzes
- Wie wendet man den Banachschen Fixpunktsatz an

Motivation

1. Die meisten Probleme in der Praxis führen auf nichtlineare Gleichungssysteme
2. Je genauer das (mathematische) Modell ist, desto eher ist es nichtlinear:
   - Pendelschwingung: Auslenkungswinkel φ beschrieben durch
     $$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0 \quad \text{vs.} \quad \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0$$
     für kleine vs. große Auslenkungen.

Motivation

1. Die meisten Probleme in der Praxis führen auf nichtlineare Gleichungssysteme
2. Je genauer das (mathematische) Modell ist, desto eher ist es nichtlinear:
   - Pendelschwingung: Auslenkungswinkel φ beschrieben durch
     $$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0 \quad \text{vs.} \quad \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0$$
     für kleine vs. große Auslenkungen.
   - Lineare vs. nichtlineare Diffusion: Temperatur u beschrieben durch
     $$u_t = \operatorname{div}(k\,\nabla u) \quad \text{vs.} \quad u_t = \operatorname{div}(k(u)\,\nabla u)$$
     mit Wärmeleitfähigkeit $k(u) = c_1 + c_2 u + c_3 u^3$.

Motivation

1. Die meisten Probleme in der Praxis führen auf nichtlineare Gleichungssysteme
2. Je genauer das (mathematische) Modell ist, desto eher ist es nichtlinear:
   - Pendelschwingung: Auslenkungswinkel φ beschrieben durch
     $$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0 \quad \text{vs.} \quad \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0$$
     für kleine vs. große Auslenkungen.
   - Lineare vs. nichtlineare Diffusion: Temperatur u beschrieben durch
     $$u_t = \operatorname{div}(k\,\nabla u) \quad \text{vs.} \quad u_t = \operatorname{div}(k(u)\,\nabla u)$$
     mit Wärmeleitfähigkeit $k(u) = c_1 + c_2 u + c_3 u^3$.
   - Strömungsprobleme, Netzwerkanalyse, ...

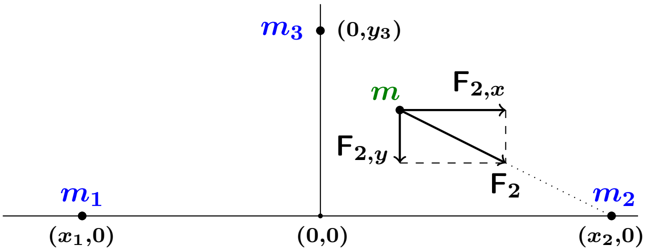
Beispiel 5.1

Für die Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen M_1 und M_2 mit gegenseitigem Abstand r gilt (Newtons Gravitationsgesetz):

$$F = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$Nm^2/kg.

Wir betrachten das folgende Gravitationsfeld:



Beispiel 5.1

Gesucht: Punkt (x, y), so dass für eine Punktmasse m an der Stelle (x, y) die Gravitationskräfte $\mathbf{F}_i$ zwischen m und m_i, $i = 1, 2, 3$, im Gleichgewicht sind.

Hilfsgrößen mit $i = 1, 2, 3$, sind

$$r_i := \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

$$F_i := G\frac{m_i m}{r_i^2}$$

$$F_{i,x} := \frac{F_i(x_i - x)}{r_i}$$

$$F_{i,y} := \frac{F_i(y_i - y)}{r_i}$$

Beispiel 5.1

Die Gleichgewichtsbedingungen sind wie folgt:

$$\boldsymbol{F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = 0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0}$$

Beispiel 5.1

Die Gleichgewichtsbedingungen sind wie folgt:

$$F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = 0 \quad \text{und} \quad F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0$$

Hieraus ergibt sich das System

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i(x_i - x)}{\left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right)^{3/2}} = 0 \\ f_2(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i(y_i - y)}{\left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right)^{3/2}} = 0. \end{aligned}$$

Beispiel 5.2

Statt der linearen Integralgleichung im Beispiel 3.3.

$$u(x) + 2\int_0^1 \cos(xt)u(t)\,dt = 2, \quad x \in [0,1]$$

ist nun eine nichtlineare Integralgleichung zu lösen:

Gesucht ist eine Funktion $u(x) \geq 0$, die die Integralgleichung

$$u(x) + \int_0^1 \cos(xt)u(t)^3\,dt = 2, \quad x \in [0,1],$$

erfüllt.

Beispiel 5.2

Das Problem wird, wie in Beispiel 3.7, auf dem Gitter

$$t_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) h, \quad j = 1, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n},$$

diskretisiert.

Man erhält dann die Gleichungen

$$u_i + h \sum_{j=1}^{n} \cos(t_i t_j) u_j^3 = 2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

für die Unbekannten $u_i \approx u(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Problemstellung

Aufgabe

Zu gegebenem $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestimme $\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$,

so dass

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, \ldots, x_n^*) &= 0 \\ \vdots \quad &\ \vdots \quad \vdots \\ f_n(x_1^*, \ldots, x_n^*) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Kompakte Darstellung:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$;

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$;

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

- Lineare Gleichungssysteme: Sonderfall dieser Problemstellung

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

- Lineare Gleichungssysteme: Sonderfall dieser Problemstellung

$$A\,x^* = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x^*) = A\,x^* - b = 0.$$

- Der Spezialfall $n = 1$ wird oft als skalare Gleichung in einer Unbekannten bezeichnet.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

- Lineare Gleichungssysteme: Sonderfall dieser Problemstellung

$$A\,x^* = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x^*) = A\,x^* - b = 0.$$

- Der Spezialfall $n = 1$ wird oft als skalare Gleichung in einer Unbekannten bezeichnet.
- Hat man mehr (nichtlineare) Gleichungen als Unbekannte, d.h.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ mit } m > n$$

erhält man ein nichtlineares Ausgleichsproblem
$\rightsquigarrow$ siehe nächstes Kapitel.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$.

Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Fragen/Probleme:

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?
- Unter welchen Bedingungen konvergiert das Verfahren?

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?
- Unter welchen Bedingungen konvergiert das Verfahren?
- Wie schnell konvergiert das Verfahren?

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?
- Unter welchen Bedingungen konvergiert das Verfahren?
- Wie schnell konvergiert das Verfahren?
- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

Kondition eines Nullstellenproblems

Absolute Kondition:

Eingabedaten		Ausgabedaten
$\tilde{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{X}$, die mit Fehlern $\boldsymbol{\Delta p} = \tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}$ behaftet sind	→ Problem, Prozess $\boldsymbol{F}$ →	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \in \boldsymbol{Y}$ mit Fehlern $\boldsymbol{\Delta y} = \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{p}}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$

Struktur: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch einen Satz $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)^T \in \mathbb{R}^m$ von Parametern vollständig beschreibbar: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p})$.

Schwierigkeit: eine explizite Vorschrift $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{x}^*$ nicht vorhanden.

Kondition eines Nullstellenproblems

Beispiel 5.6: Nullstelle eines Polynoms ($x \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}^{n+1}$)

Die Eingabeparameter sind $p = (p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f(x;p) := \sum_{i=0}^{n} p_i x^i =: P(x).$$

Es gilt: $f(x;p) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$.

Kondition eines Nullstellenproblems

Beispiel 5.6: Nullstelle eines Polynoms ($x \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}^{n+1}$)

Die Eingabeparameter sind $p = (p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f(x;p) := \sum_{i=0}^{n} p_i x^i =: P(x).$$

Es gilt: $f(x;p) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$.

Frage: wie hängt $\|x^* - \tilde{x}^*\|$ von $\|p - \tilde{p}\|$ ab?

Annahme: $\det\big(D_x f(x^*;p)\big) \neq 0$ (x^* ist einfache Nullstelle).

Mit Taylorentwicklung:

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_{\mathbb{R}^n} \dot{\leq} \kappa_{\text{abs}}(x^*, p) \|p - \tilde{p}\|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\text{mit} \quad \kappa_{\text{abs}}(x^*, p) := \big\|\big(D_x f(x^*;p)\big)^{-1} D_p f(x^*;p)\big\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n}.$$

Kondition eines Nullstellenproblems: Beispiel 5.10

Für $f(x;p) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = P(x)$ erhält man

$$D_x f(x^*;p) = P'(x^*),$$
$$D_p f(x^*;p) = \begin{pmatrix} 0 & x^* & (x^*)^2 & \ldots & (x^*)^n \end{pmatrix}.$$

Mit der Norm $\|\cdot\|_1$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, ergibt sich

$$|x^* - \tilde{x}^*| \dot{\leq} |P'(x^*)|^{-1} \max_{1\leq j\leq n} |x^*|^j \sum_{j=0}^{n} |p_j - \tilde{p}_j|.$$

Kondition eines Nullstellenproblems: Beispiel 5.10

Für $f(x;p) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = P(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} D_x f(x^*;p) &= P'(x^*), \\ D_p f(x^*;p) &= \begin{pmatrix} 0 & x^* & (x^*)^2 & \dots & (x^*)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der Norm $\|\cdot\|_1$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, ergibt sich

$$|x^* - \tilde{x}^*| \stackrel{.}{\leq} |P'(x^*)|^{-1} \max_{1 \leq j \leq n} |x^*|^j \sum_{j=0}^{n} |p_j - \tilde{p}_j|.$$

Annahme: $P'(x^*) \neq 0$, also x^* ist eine einfache Nullstelle.

Man erwartet eine schlechte absolute Kondition in Fällen, in denen $\kappa_{\text{abs}}(x^*, p) = |P'(x^*)|^{-1} \max_{1 \leq j \leq n} |x^*|^j$ groß ist.

Kondition bei mehrfachen Nullstellen

Annahme: $\det\left(D_x f(x^*; p)\right) = 0$ (mehrfache Nullstelle).
Wir betrachten $n = 1$, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sei $m \geq 1$, die Vielfachheit der Nullstelle x^*:

$$f(x^*) = 0,\ f'(x^*) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(x^*) = 0,\ f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Kondition bei mehrfachen Nullstellen

Annahme: $\det\left(D_x f(x^*; p)\right) = 0$ (mehrfache Nullstelle).
Wir betrachten $n = 1$, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sei $m \geq 1$, die Vielfachheit der Nullstelle x^*:

$$f(x^*) = 0,\ f'(x^*) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(x^*) = 0,\ f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Mit Taylorentwicklung:

$$|\tilde{x}^* - x^*| \dot{\leq} \left(m! \frac{\|D_p f(x^*; p)\|_\infty}{|f^{(m)}(x^*)|} \right)^{\frac{1}{m}} \|\tilde{p} - p\|_1^{\frac{1}{m}}.$$

Kondition bei mehrfachen Nullstellen

Annahme: $\det\left(D_x f(x^*;p)\right) = 0$ (mehrfache Nullstelle).
Wir betrachten $n = 1$, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sei $m \geq 1$, die Vielfachheit der Nullstelle x^*:

$$f(x^*) = 0,\; f'(x^*) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(x^*) = 0,\; f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Mit Taylorentwicklung:

$$|\tilde{x}^* - x^*| \,\dot{\leq}\, \left(m! \frac{\|D_p f(x^*;p)\|_\infty}{|f^{(m)}(x^*)|}\right)^{\frac{1}{m}} \|\tilde{p} - p\|_1^{\frac{1}{m}}.$$

- Ein Datenfehler $\|\tilde{p} - p\|_1 = \epsilon \ll 1$ kann wegen des Faktors $\epsilon^{\frac{1}{m}}$ enorm verstärkt werden.
- Probleme mit mehrfachen Nullstellen sind im Allgemeinen hinsichtlich Störungen in den Eingabedaten sehr schlecht konditioniert

Beispiel 5.12

Das Polynom

$$f(x;p) = \sum_{i=0}^{3} p_i x^i = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

hat eine dreifache Nullstelle $x^* = 1$.

Wir betrachten eine Störung (nur) des Eingabeparameters p_0:

$$\tilde{p}_0 = p_0 - \epsilon = -1 - \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Beispiel 5.12

Das Polynom

$$f(x;p) = \sum_{i=0}^{3} p_i x^i = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

hat eine dreifache Nullstelle $x^* = 1$.

Wir betrachten eine Störung (nur) des Eingabeparameters p_0:

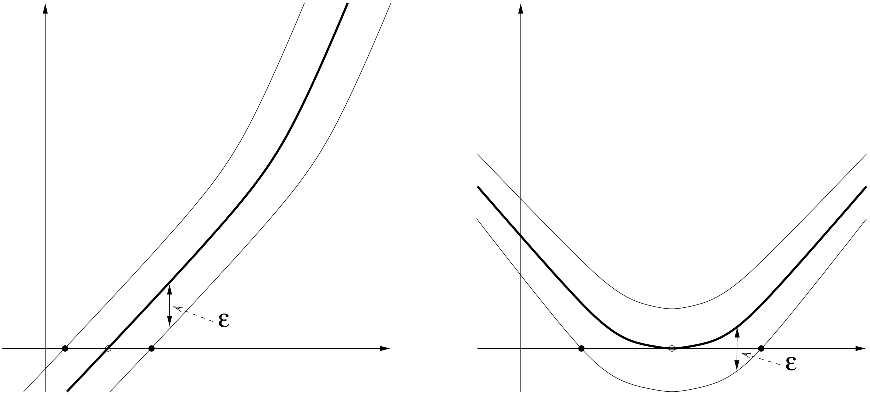
$$\tilde{p}_0 = p_0 - \epsilon = -1 - \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Es gilt

$$f(\tilde{x}^*;\tilde{p}) = 0 \Leftrightarrow f(\tilde{x}^*;p) - \epsilon = 0 \Leftrightarrow (\tilde{x}^* - 1)^3 - \epsilon = 0 \Leftrightarrow \tilde{x}^* = 1 +$$

Zum Beispiel für $\epsilon = 10^{-12}$ ergibt sich $|x^* - \tilde{x}^*| = 10^{-4}$.

Kondition bei mehrfachen Nullstellen: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Auwertung auf einem Rechner (Bemerkung 5.14)

Sei f eine skalare stetige Funktion mit einer lokal eindeutigen Nullstelle:

$$f(x) = 0 \text{ für } x \in (a, b) \iff x = x^*.$$

Auf einem Rechner (Maschinenzahlen $\mathbb{M}$):

$$\tilde{f} : (a, b) \to \mathbb{M}.$$

Auwertung auf einem Rechner (Bemerkung 5.14)

Sei f eine skalare stetige Funktion mit einer lokal eindeutigen Nullstelle:

$$f(x) = 0 \text{ für } x \in (a, b) \iff x = x^*.$$

Auf einem Rechner (Maschinenzahlen $\mathbb{M}$):

$$\tilde{f} : (a, b) \to \mathbb{M}.$$

Die Auswertung $\tilde{f}$ ist stückweise konstant:
Es sei $\hat{x} \in \mathbb{M}$, dann gilt $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(\hat{x})$ für alle $x \in (a, b)$ für die $\mathrm{fl}(x) = \hat{x}$ gilt.

Auwertung auf einem Rechner (Bemerkung 5.14)

Sei f eine skalare stetige Funktion mit einer lokal eindeutigen Nullstelle:

$$f(x) = 0 \text{ für } x \in (a, b) \iff x = x^*.$$

Auf einem Rechner (Maschinenzahlen $\mathbb{M}$):

$$\tilde{f} : (a, b) \to \mathbb{M}.$$

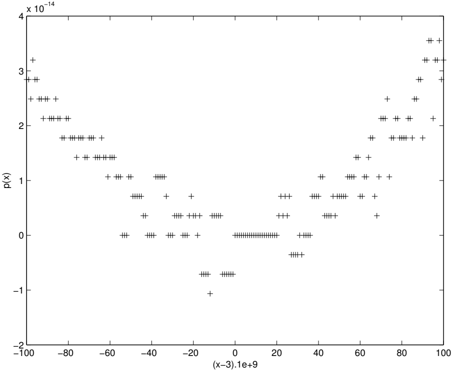
Die Auswertung $\tilde{f}$ ist stückweise konstant:
Es sei $\hat{x} \in \mathbb{M}$, dann gilt $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(\hat{x})$ für alle $x \in (a, b)$ für die $\mathrm{fl}(x) = \hat{x}$ gilt.

$\tilde{f}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{M}$:

möglicherweise keine Lösung, oder (sehr) viele Lösungen.

Beispiel 5.15

Sei $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (doppelte Nullstelle $x^* = 3$).
Auswertungen:
$P(3 + i * 10^{-9}), \qquad i = -100, -99, \ldots 99, 100.$



$\tilde{P}$ hat viele Nullstellen im Intervall $[3 - 10^{-7}, 3 + 10^{-7}]$

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Allgemeiner Ansatz für Fixpunktiteration:

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Allgemeiner Ansatz für Fixpunktiteration:

- Sei $\boldsymbol{M_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine von $\boldsymbol{x}$ abhängige Matrix, die in einer Umgebung der Nullstelle $\boldsymbol{x}^*$ invertierbar ist. Dann folgt

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}^*}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Allgemeiner Ansatz für Fixpunktiteration:

- Sei $M_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine von x abhängige Matrix, die in einer Umgebung der Nullstelle x^* invertierbar ist. Dann folgt
$$f(x^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_{x^*}\ f(x^*) = 0$$
- Erweitere die Gleichung mit x^*, d.h.
$$M_{x^*}\ f(x^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^* = x^* - M_{x^*}\ f(x^*)$$

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Allgemeiner Ansatz für Fixpunktiteration:

- Sei $M_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine von x abhängige Matrix, die in einer Umgebung der Nullstelle x^* invertierbar ist. Dann folgt
$$f(x^*) = 0 \quad \iff \quad M_{x^*} \, f(x^*) = 0$$
- Erweitere die Gleichung mit x^*, d.h.
$$M_{x^*} \, f(x^*) = 0 \quad \iff \quad x^* = x^* - M_{x^*} \, f(x^*)$$

Daraus folgt: Das Nullstellenproblem
$$f(x^*) = 0$$
ist äquivalent zum Fixpunktproblem
$$x^* = \Phi(x^*), \quad \text{mit} \quad \Phi(x) := x - M_x \, f(x).$$

Fixpunktiteration

Fixpunktiteration

- Wähle Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*
- Bilde

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Fixpunktiteration

Fixpunktiteration

- Wähle Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*
- Bilde
$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Bemerkungen:

1. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Steigung von Φ an x^* entscheidet darüber, ob die Fixpunktiteration gegen x^* konvergiert/divergiert:
    - $|\Phi'(x^*)| < 1$: x^* anziehend
    - $|\Phi'(x^*)| > 1$: x^* abstoßend

Fixpunktiteration

Fixpunktiteration

- Wähle Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*
- Bilde

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Bemerkungen:

1. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Steigung von Φ an x^* entscheidet darüber, ob die Fixpunktiteration gegen x^* konvergiert/divergiert:
   - $|\Phi'(x^*)| < 1$: x^* anziehend
   - $|\Phi'(x^*)| > 1$: x^* abstoßend
2. Durch eine geeignete Wahl von M_x (bzw. Φ) lässt sich die Konvergenz der Fixpunktiteration positiv beeinflussen.

Ein paar Definitionen

Lipschitz-Stetigkeit

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion

$$f : E \to \mathbb{R}^n$$

heißt Lipschitz-stetig auf E, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x - y\|$$

für alle $x,\ y \in E$.

Ein paar Definitionen

Kontraktion

Sei $\boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Eine Abbildung $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ heißt Kontraktion auf $\boldsymbol{E}$, wenn

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leq \boldsymbol{L}\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}$ mit $\boldsymbol{L} < \boldsymbol{1}$.

Ein paar Definitionen

Kontraktion

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ heißt Kontraktion auf E, wenn

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in E$ mit $L < 1$.

- Φ ist genau dann eine Kontraktion, wenn sie Lipschitz-stetig mit der Konstanten $L \in [0, 1)$ ist.

Selbstabbildung

Eine Abbildung Φ ist eine Selbstabbildung auf $E \subset \mathbb{R}^n$, wenn

$$\Phi : E \to E.$$

Beispiel 5.20

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

Beispiel 5.20

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$.

Beispiel 5.20

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$.
- Mögliche Fixpunktfunktionen sind

$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x+1)^{\frac{1}{6}}.$$

Beispiel 5.20

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$.
- Mögliche Fixpunktfunktionen sind

$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x + 1)^{\frac{1}{6}}.$$

- Betrachte $\Phi_1(x)$: wir erhalten

$$|\Phi_1'(x)| = |6\,x^5| > 1 \quad \text{für } x \in [1, 2],$$

d.h. $\Phi_1(x)$ ist nicht als Fixpunktfunktion geeignet.

Beispiel 5.20

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$.
- Mögliche Fixpunktfunktionen sind

$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x+1)^{\frac{1}{6}}.$$

- Betrachte $\Phi_1(x)$: wir erhalten

$$|\Phi_1'(x)| = |6\,x^5| > 1 \quad \text{für } x \in [1, 2],$$

  d.h. $\Phi_1(x)$ ist nicht als Fixpunktfunktion geeignet.
- Betrachte $\Phi_2(x)$: wir erhalten

$$|\Phi_2'(x)| = \left|\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{5}{6}}\right| \leq \frac{1}{6} \quad \text{für } x \in [1, 2]$$

Beispiel 5.20

und damit (Mittelwertsatz, $\xi \in (1, 2)$)

$$\begin{aligned} |\Phi_2(x) - \Phi_2(y)| &= |\Phi_2'(\xi)(x-y)| \\ &\leq \frac{1}{6}|x-y| \quad \text{für } x, y \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Beispiel 5.20

und damit (Mittelwertsatz, $\xi \in (1,2)$)

$$\begin{aligned} |\Phi_2(x) - \Phi_2(y)| &= |\Phi_2'(\xi)(x-y)| \\ &\leq \frac{1}{6}|x-y| \quad \text{für } x, y \in [1,2]. \end{aligned}$$

- Die Funktion $\Phi_2(x)$ ist eine Selbstabbildung auf $[1,2]$, d.h. $\Phi_2 : [1,2] \to [1,2]$.

Beispiel 5.20

und damit (Mittelwertsatz, $\xi \in (1,2)$)

$$\begin{aligned} |\Phi_2(x) - \Phi_2(y)| &= |\Phi_2'(\xi)(x-y)| \\ &\leq \frac{1}{6}\,|x-y| \quad \text{für } x, y \in [1,2]. \end{aligned}$$

- Die Funktion $\Phi_2(x)$ ist eine Selbstabbildung auf $[1,2]$, d.h. $\Phi_2 : [1,2] \to [1,2]$.
- Ergebnisse

k	$x_0 = 1.2$ $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$	$x_0 = 1.135$ $x_{k+1} = \Phi_1(x_k)$
0	1.20000000	1.14e+000
1	1.14043476	1.14e+000
2	1.13522949	1.17e+000
3	1.13476890	1.57e+000
4	1.13472810	1.38e+001
5	1.13472448	6.91e+006
6	1.13472416	1.09e+041
7	1.13472414	1.66e+246

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E, d.h.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E, d.h.

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq L||x - y|| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

Dann gilt:

1. Es existiert genau ein Fixpunkt x^* von Φ in E.

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E, d.h.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

Dann gilt:

1. Es existiert genau ein Fixpunkt x^* von Φ in E.
2. Für beliebiges $x_0 \in E$ konvergiert die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*.

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E, d.h.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

3. A-priori-Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L}\|x_1 - x_0\|.$$

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E, d.h.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

3. A-priori-Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L}\|x_1 - x_0\|.$$

4. A-posteriori-Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1 - L}\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Fragen/Probleme:

- Unter welchen Bedingungen konvergiert iteratives Verfahren?

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Fragen/Probleme:

- Unter welchen Bedingungen konvergiert iteratives Verfahren?

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz liefert hinreichende Bedingungen, damit

$$x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, \ldots$$

gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Fragen/Probleme:

- Unter welchen Bedingungen konvergiert iteratives Verfahren?

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz liefert hinreichende Bedingungen, damit

$$\boldsymbol{x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, \ldots}$$

gegen einen Fixpunkt $\boldsymbol{x}^*$ konvergiert.

Fragen/Probleme:

- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Fragen/Probleme:

- Unter welchen Bedingungen konvergiert iteratives Verfahren?

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz liefert hinreichende Bedingungen, damit

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \; k = 0, 1, \ldots$$

gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Fragen/Probleme:

- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

$\Rightarrow$ Wir möchten eine gewünschte Genauigkeit ϵ erreichen, so dass

$$\|x_k - x^*\| \leq \epsilon.$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Frage

- Wie viele Iterationen müssen wir durchführen?

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Frage

- Wie viele Iterationen müssen wir durchführen?

$\Rightarrow$ Mit Hilfe der a-priori-Fehlerabschätzung erhalten wir

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\| \overset{!}{\leq} \epsilon.$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Frage

- Wie viele Iterationen müssen wir durchführen?

$\Rightarrow$ Mit Hilfe der a-priori-Fehlerabschätzung erhalten wir

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\| \overset{!}{\leq} \epsilon.$$

und damit ist die maximal benötigte Anzahl an Iterationen

$$k \geq \log\left(\epsilon(1-L)/\|x_1 - x_0\|\right)/\log(L)$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Frage

- Wie viele Iterationen müssen wir durchführen?

$\Rightarrow$ Mit Hilfe der a-priori-Fehlerabschätzung erhalten wir

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\| \overset{!}{\leq} \epsilon.$$

und damit ist die maximal benötigte Anzahl an Iterationen

$$k \geq \log\left(\epsilon(1-L)/\|x_1 - x_0\|\right)/\log(L)$$

Beachte

Wegen

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq L^{k-1}\|x_1 - x_0\|$$

ist die Schranke in der a-posteriori-Fehlerabschätzung immer besser (d.h. kleiner) als die in der a-priori-Fehlerabschätzung.

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.24

Sei $X = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$ und Φ auf E stetig differenzierbar.
Es gelte

$$\Phi : [a, b] \to [a, b] \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und

$$\max_{x \in [a,b]} \left|\Phi'(x)\right| =: L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt für $\| \cdot \| = | \cdot |$

Beachte

Nach Mittelwertsatz gilt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)(x - y)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} |\Phi'(\xi)||x - y|,$$

d.h. Φ ist eine Kontraktion.

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.25

Sei $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X} = \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, und $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und bzgl. einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gelte für die zugehörige Matrixnorm

$$\max_{x \in E} \|\boldsymbol{\Phi}'(x)\| = L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt.

Hierbei ist

$$\boldsymbol{\Phi}'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_n(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_n(x) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{\Phi}$ an der Stelle x.

Beispiel 5.20

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

Beispiel 5.20

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion
$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

Mögliche Fixpunktfunktion

$$\Phi_2(x) := (x+1)^{\frac{1}{6}}.$$

Es gilt
$$\Phi_2 : [1,2] \to [1,2] \quad \text{(Selbstabbildung)}$$
$$|\Phi_2'(x)| = \left|\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{5}{6}}\right| \leq \frac{1}{6} \quad \text{für } x \in [1,2].$$

Beispiel 5.20

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion
$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

Mögliche Fixpunktfunktion

$$\Phi_2(x) := (x+1)^{\frac{1}{6}}.$$

Es gilt
$$\Phi_2 : [1,2] \to [1,2] \quad \text{(Selbstabbildung)}$$
$$|\Phi_2'(x)| = \left| \frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{5}{6}} \right| \leq \frac{1}{6} \quad \text{für } x \in [1,2].$$

Daraus folgt:
f hat eine eindeutige Nullstelle $x^* \in [1,2]$.
Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$, $x_0 \in [1,2]$, konvergiert gegen x^*.

Beispiel 5.27

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞-Norm.

Beispiel 5.27

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞-Norm.

- Fixpunktfunktion:

Beispiel 5.27

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞-Norm.

- Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{8}xy^2 + \frac{1}{8}\sin x \end{pmatrix}$$

Beispiel 5.27

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞-Norm.

- Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{8}xy^2 + \frac{1}{8}\sin x \end{pmatrix}$$

- Selbstabbildung:

Beispiel 5.27

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞-Norm.

- Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{8}xy^2 + \frac{1}{8}\sin x \end{pmatrix}$$

- Selbstabbildung:
  Für $x \in [0,1]$ gilt $0 \leq \cos x \leq 1$ und $0 \leq \sin x \leq 1$. Daher gilt

$$\Phi : E \to E.$$

Beispiel 5.27

- Kontraktion:

Beispiel 5.27

- Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\boldsymbol{\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}.}$$

Beispiel 5.27

- Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x,y)\|_\infty &= \max\left\{\frac{1}{6}|\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8}\left(\left|y^2 + \cos x\right| + 2|xy|\right)\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.27

- Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x,y)\|_\infty &= \max\left\{\frac{1}{6}|\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8}\left(\left|y^2+\cos x\right| + 2|xy|\right)\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.25 existiert genau eine Lösung in E.

Beispiel 5.27

- Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x,y)\|_\infty &= \max\left\{\frac{1}{6}|\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8}\left(\left|y^2 + \cos x\right| + 2|xy|\right)\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.25 existiert genau eine Lösung in E.

- Fehlerschätzung:

Beispiel 5.27

- Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x,y)\|_\infty &= \max\left\{\frac{1}{6}|\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8}\left(\left|y^2+\cos x\right| + 2|xy|\right)\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.25 existiert genau eine Lösung in E.

- Fehlerschätzung: Mit $\epsilon = 10^{-3}$ und $L = \frac{1}{2}$ benötigt man maximal

$$k \geq \log\left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{\|x_1 - x_0\|}\right) \Big/ \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Schritte.

Beispiel 5.27

Für den Startwert

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

erhält man als 1. Iterierte

$$(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x_0 + \frac{1}{3} y_0 \\ \frac{1}{8} x_0\, y_0^2 + \frac{1}{8}\sin x_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

und damit

$$k \geq \log\left(\frac{0.5 \times 10^{-3}}{1/6}\right) \Big/ \log\left(\frac{1}{2}\right) = 8.38,$$

d.h. es werden maximal 9 Iterationen benötigt.

Beispiel 5.27

Für den Startwert

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

erhält man als 1. Iterierte

$$(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x_0 + \frac{1}{3}y_0 \\ \frac{1}{8}x_0\, y_0^2 + \frac{1}{8}\sin x_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

und damit

$$k \geq \log\left(\frac{0.5 \times 10^{-3}}{1/6}\right) \Big/ \log\left(\frac{1}{2}\right) = 8.38,$$

d.h. es werden maximal 9 Iterationen benötigt.

Ergebnisse: Siehe folgende Tabelle.

Beispiel 5.27

k	$(x_0, y_0) = (0,0)$ $(x_k, y_k) = \phi(x_{k-1}, y_{k-1})$	$\frac{0.5}{1-0.5} * \|(x_k, y_k) - (x_{k-1}, y_{k-1})^T\|_\infty$
0	(0.00000000, 0.00000000)	–
1	(0.16666667, 0.00000000)	1.67e-01
2	(0.16435721, 0.02073702)	2.07e-02
3	(0.17133296, 0.02046111)	6.98e-03
4	(0.17104677, 0.02132096)	8.60e-04
5	(0.17134151, 0.02128646)	2.95e-04
6	(0.17132164, 0.02132275)	3.63e-05
7	(0.17133430, 0.02132034)	1.27e-05
8	(0.17133314, 0.02132189)	1.56e-06
9	(0.17133369, 0.02132175)	5.52e-07

Aus der a-posteriori-Fehlerabschätzung ergibt sich, dass schon für $k = 4$ (statt $k = 9$) die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Zusammenfassung

- Analyse der Kondition schwierig weil $p \to x^* = F(p)$ nur implizit gegeben.
- Problem mit mehrfachen Nullstellen ist (sehr) schlecht konditioniert.
- Nullstellenproblem $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$. Es gibt viele Möglichkeiten für Φ.

Zusammenfassung

- Analyse der Kondition schwierig weil $p \to x^* = F(p)$ nur implizit gegeben.
- Problem mit mehrfachen Nullstellen ist (sehr) schlecht konditioniert.
- Nullstellenproblem $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$. Es gibt viele Möglichkeiten für Φ.
- Fixpunktiteration:

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

Zusammenfassung

- Analyse der Kondition schwierig weil $p \to x^* = F(p)$ nur implizit gegeben.
- Problem mit mehrfachen Nullstellen ist (sehr) schlecht konditioniert.
- Nullstellenproblem $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$. Es gibt viele Möglichkeiten für Φ.
- Fixpunktiteration:
$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$
- Banachscher Fixpunktsatz:
$$\Phi : E \to E \qquad \text{(Selbstabbildung)}$$
$$\Phi \text{ Kontraktion auf } E$$
hinreichende Bedingungen für Konvergenz Fixpunktiteration.