Veranstaltung Titel

Vortragender

Assistenten

Institut XXX

Wintersemester/Sommersemester xyz

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 8.1-8.3

- Lagrange-Interpolationsaufgabe
- Kondition der Interpolationsaufgabe
- Darstellungen und Auswertung des Interpolationspolynoms

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 8.1-8.3

- Lagrange-Interpolationsaufgabe
- Kondition der Interpolationsaufgabe
- Darstellungen und Auswertung des Interpolationspolynoms

Was Sie mitnehmen sollten:

- Die Lebesque-Konstante als Maß für die absolute Kondition
- Neville-Aitken Algorithmus zur Auswertung des Interpolationspolynoms
- Unterschiedliche Darstellungen des Interpolationspolynoms

Allgemeine Interpolationsaufgaben

Interpolationsaufgabe

Gegeben seien Stützstellen

$$x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, und Daten

$$f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}.$$

Es sei G_n ein endlich dimensionaler Raum stetiger Funktionen (dessen Dimension von n abhängt). Man bestimme diejenige Funktion $g_n \in G_n$, die

$$g_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

erfüllt.

Allgemeine Interpolationsaufgaben

Lagrange-Polynominterpolation:

$$G_n = \Pi_n = \Big\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \Big\}$$

Allgemeine Interpolationsaufgaben

Lagrange-Polynominterpolation:

$$G_n = \Pi_n = \{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

Splineinterpolation $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$:

$$G_n := \left\{ g \in C^2([x_0, x_n]) \mid g_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, 0 \leq i \leq n-1 \right\},$$

Allgemeine Interpolationsaufgaben

Lagrange-Polynominterpolation:

$$G_n = \Pi_n = \{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

Splineinterpolation ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$):

$$G_n := \left\{ g \in C^2([x_0, x_n]) \mid g_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, 0 \leq i \leq n-1 \right\},$$

Trigonometrische Interpolation:

$$G_n = \{ \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx} \mid c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C} \},$$

wobei i die komplexe Einheit mit $i^2 = -1$ ist. Mit $z := e^{ix}$ nimmt jedes $g \in G_n$ die Form eines Polynomes $\sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j$ über $\mathbb{C}$ an.

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$) und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$) und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch
$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \,\middle|\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$) und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch
$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$
- "Lagrange": Interpolation der Funktionswerte.
- Weitere Möglichkeit:
  - Hermite-Interpolation: zusätzlich Interpolation der Ableitungen.

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?
- Wie können wir den Fehler reduzieren?

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?
- Wie können wir den Fehler reduzieren?

Wichtig für: numerische Differentiation, numerische Integration, Computergraphik und viele weitere Anwendungen...

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Lagrange-Fundamentalpolynome

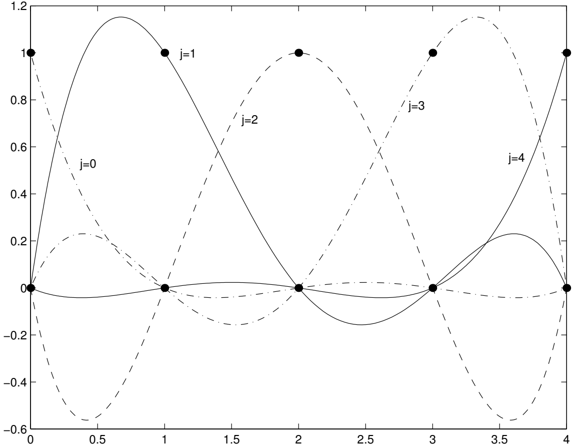
Für den Fall äquidistanter Stützstellen

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

gilt

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_{jn}(t) := \ell_{jn}(x_0 + th) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x_0 + th - (x_0 + kh)}{x_0 + jh - (x_0 + kh)} \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{(t-k)}{(j-k)} \\ &= \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (t-k) \end{aligned}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome



$$n = 4$$

$$\hat{\ell}_{j4}(t)$$

$$t \in [0, 4]$$

Das Lagrange-Interpolationspolynom

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \ldots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Das Lagrange-Interpolationspolynom

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \dots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms ergibt sich:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen gilt

$$P(Q|x_0, \dots, x_n) = Q.$$

Das Lagrange-Interpolationspolynom

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \ldots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms ergibt sich:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen gilt

$$P(Q|x_0, \ldots, x_n) = Q.$$

Begründung: Q interpoliert sich selbst und muss wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein.

Kondition

Frage: wie ist die Empfindlichkeit des Interpolationspolynoms $P(f|x_0,\ldots,x_n)$ bezüglich Störungen in den Daten $f(x_j)$?

Absolute Kondition

$$\max_{x\in[a,b]}\left|P(f|x_0,\ldots,x_n)(x)-P(\tilde f|x_0,\ldots,x_n)(x)\right|$$

$$\leq \kappa_{\text{Leb}}\max_{0\leq j\leq n}|f(x_j)-\tilde f(x_j)|,\quad \text{mit}\quad \kappa_{\text{Leb}}:=\max_{x\in[a,b]}\sum_{j=0}^{n}|\ell_{j,n}(x)|$$

Kondition

Frage: wie ist die Empfindlichkeit des Interpolationspolynoms $P(f|x_0,\dots,x_n)$ bezüglich Störungen in den Daten $f(x_j)$?

Absolute Kondition

$$\max_{x\in[a,b]}\left|P(f|x_0,\dots,x_n)(x)-P(\tilde f|x_0,\dots,x_n)(x)\right|$$

$$\leq \kappa_{\mathrm{Leb}} \max_{0\leq j\leq n}|f(x_j)-\tilde f(x_j)|, \quad \text{mit} \quad \kappa_{\mathrm{Leb}} := \max_{x\in[a,b]}\sum_{j=0}^{n}|\ell_{j,n}(x)|$$

κ_{Leb} ist die Lebesgue-Konstante:

- sie hängt nur von der Verteilung der Stützstellen in $[a,b]$ ab
- Translationsinvarianz: sie ändert sich nicht wenn die Stützstellen (mit zugehörigen Daten) um d verschoben werden

Lebesgue-Konstante

Eigenschaften:

- $$\kappa_{\text{Leb}} = \max_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{\ell}_{j,n}(t)\right|, \quad \hat{\ell}_{j,n} := \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{t-t_k}{t_j-t_k}.$$

Lebesgue-Konstante

Eigenschaften:

- $$\kappa_{\text{Leb}} = \max_{t \in [0,1]} \sum_{j=0}^{n} \left| \hat{\ell}_{j,n}(t) \right|, \quad \hat{\ell}_{j,n} := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{t - t_k}{t_j - t_k}.$$
- Bei einer äquidistanten Stützstellenverteilung:
  $$\kappa_{\text{Leb}} \sim \frac{2^{n+1}}{n \log n} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Lebesgue-Konstante

Eigenschaften:

- $$\kappa_{\text{Leb}} = \max_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{\ell}_{j,n}(t)\right|, \quad \hat{\ell}_{j,n} := \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{t-t_k}{t_j-t_k}.$$
- Bei einer äquidistanten Stützstellenverteilung:
  $$\kappa_{\text{Leb}} \sim \frac{2^{n+1}}{n\log n} \quad \text{für } n\to\infty.$$
- Für die Tschebyscheff-Stützstellen
  $$t_j := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right), \quad j = 0,\ldots,n,$$
  gilt
  $$\kappa_{\text{Leb}} \sim \frac{2}{\pi}\log n \quad \text{für } n\to\infty.$$

Lebesgue-Konstante

n	äquidistant	Tschebyscheff
5	3.106	2.104
10	29.89	2.489
15	5.121e+2	2.728
20	1.099e+4	2.901

Fazit zur absoluten Kondition

Die Konditionszahl $\kappa_{\mathbf{Leb}}$ der Lagrange-Interpolationsaufgabe hängt nur von der Verteilung der Stützstellen ab. Bei einer äquidistanten Stützstellenverteilung ist für große n-Werte diese Konditionszahl sehr groß. Bei der Interpolation mit Tschebyscheff-Stützstellen ist, für große n-Werte, die Konditionszahl viel kleiner.

Lebesgue-Konstante

Weitere Bedeutung der Lebesgue-Konstante.

Sei f stetig auf $[a,b]$ und $\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Es gilt:

$$\|f - P(f|x_0,\ldots,x_n)\|_\infty \leq (1+\kappa_{\mathrm{Leb}}) \inf_{P_n \in \Pi_n} \|f - P_n\|_\infty,$$

d.h., die Approximationsgüte der Interpolation ist bis auf einen durch die Lebesgue-Konstante gegebenen Proportionalitätsfaktor so gut wie die der **besten Approximation** von Π_n.

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?

   Auswertung ohne explizite Bestimmung des Polynoms:

   - Neville-Aitken-Verfahren

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?

   Auswertung ohne explizite Bestimmung des Polynoms:

   - Neville-Aitken-Verfahren

2. Darstellung in geschlossener Form.

   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\boldsymbol{\Pi_n}$.

   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0, x_1)(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) \end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als Konvexkombination der beiden interpolierende Geraden darstellbar,

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0) \end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als Konvexkombination der beiden interpolierende Geraden darstellbar,

$$P(f|x_0,x_1,x_2)(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}P(f|x_1,x_2)(x)+\frac{x_2-x}{x_2-x_0}P(f|x_0,x_1)(x)$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.7 (Aitken)

$$\begin{aligned} P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = {} & \frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\dots,x_n)(x) \\ & + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.7 (Aitken)

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x)$$

Die Interpolierende an den Stellen $\{x_0,\dots,x_n\}$ ist eine Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades an den Stellen $\{x_1,\dots,x_n\}$ und $\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$, die jeweils Teilmengen der Gesamtstützstellenmenge sind.

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.7 (Aitken)

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x)$$

- Wir setzen für festes x

$$P_{i,k} := P(f|x_{i-k},\ldots,x_i)(x), \quad 0 \le k \le i \le n,$$

d.h. speziell

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) \\ P_{i,0} &= P(f|x_i)(x) = f(x_i) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.7 (Aitken)

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x)$$

Lemma 8.7 ergibt dann das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Gegeben: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$

Gesucht: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \dots & & \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
x_3 & f(x_3) & P_{3,1} & P_{3,2} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \dots & \dots & P_{n,n}
\end{array}
$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Gegeben: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$

Gesucht: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \dots & & \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
x_3 & f(x_3) & P_{3,1} & P_{3,2} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \dots & \dots & P_{n,n}
\end{array}
$$

Beachte:

$P_{n,n}$ wird bestimmt

ohne explizite Darstellung von $P(f|x_0, \dots, x_n)$.

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$			
$x_1 = 1$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$			
$x_1 = 1$			
$x_2 = 2$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$			
$x_2 = 2$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$		
$x_2 = 2$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$		
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$		

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$		
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$		

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$		

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$\Longrightarrow P(f \mid 0, 1, 2)(0.5) = 3\frac{1}{8}$

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen:
   - Neville-Aitken

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen:
   - Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form:
   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\mathbf{\Pi}_n$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen:
   - Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form:
   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\boldsymbol{\Pi_n}$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung:

Mit der monomialen Basis $1, x, \ldots, x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung:

Mit der monomialen Basis $1, x, \ldots, x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Die Bedingungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Das Gleichungssystem

$$V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

muss also zur Bestimmung der Koeffizienten a_i gelöst werden.

Die Kondition des Problems

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \to V_n^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wird durch die Konditionszahl $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ beschrieben.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\|\|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.

  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.

  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.

- Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines linearen Gleichungssystems der Größe $(n+1) \times (n+1)$.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.

  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.
- Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines linearen Gleichungssystems der Größe $(n+1) \times (n+1)$.

Beispiel 8.12: Konditionszahl $\kappa_2(V_n)$

Äquidistante bzw. Tschebyscheff Stützstellen im Intervall $[0, 1]$.

n	4	6	8	10
äquidistant	6.9e+2	3.6e+4	2.0e+6	1.2e+8
Tschebyscheff	6.3e+2	2.1e+4	6.9e+5	2.3e+7

Zusammenfassung

- Lagrange-Interpolationsaufgabe: $P_n \in \Pi_n$, so dass

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

eindeutig lösbar.

Zusammenfassung

- Lagrange-Interpolationsaufgabe: $P_n \in \Pi_n$, so dass

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

eindeutig lösbar.

- Die absolute Konditionszahl $\kappa_{\text{Leb}} = \max_{x \in [a,b]} \sum_{j=0}^{n} |\ell_{jn}(x)|$ hängt nur von der Verteilung der Stützstellen ab.

Zusammenfassung

- Lagrange-Interpolationsaufgabe: $P_n \in \Pi_n$, so dass

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

eindeutig lösbar.

- Die absolute Konditionszahl $\kappa_{\mathrm{Leb}} = \max_{x \in [a,b]} \sum_{j=0}^{n} |\ell_{jn}(x)|$ hängt nur von der Verteilung der Stützstellen ab.
- Effiziente Auswertung an einer oder wenigen Stellen x:

Neville-Aitken-Schema

Zusammenfassung

- Lagrange-Interpolationsaufgabe: $P_n \in \Pi_n$, so dass

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

  eindeutig lösbar.
- Die absolute Konditionszahl $\kappa_{\mathrm{Leb}} = \max_{x\in[a,b]} \sum_{j=0}^{n} |\ell_{jn}(x)|$ hängt nur von der Verteilung der Stützstellen ab.
- Effiziente Auswertung an einer oder wenigen Stellen x:
  Neville-Aitken-Schema
- Darstellung in geschlossener Form: mehrere Möglichkeiten, abhängig von der Wahl einer Basis in Π_n.

Zusammenfassung

- Lagrange-Interpolationsaufgabe: $P_n \in \Pi_n$, so dass

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

  eindeutig lösbar.

- Die absolute Konditionszahl $\kappa_{\text{Leb}} = \max_{x\in[a,b]} \sum_{j=0}^{n} |\ell_{jn}(x)|$ hängt nur von der Verteilung der Stützstellen ab.
- Effiziente Auswertung an einer oder wenigen Stellen x:
  Neville-Aitken-Schema
- Darstellung in geschlossener Form: mehrere Möglichkeiten, abhängig von der Wahl einer Basis in Π_n.
- Für die Numerik ist die Darstellung in der monomialen Basis ungünstig.