Veranstaltung Titel

Vortragender

Assistenten

Institut XXX

Wintersemester/Sommersemester xyz

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 9.1-9.4

- Interpolationsaufgabe mit Splinefunktionen
- Beispiel einer kubischen Splineinterpolation
- Allgemeine Splineräume
- B-Splines

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap 9.1-9.4

- Interpolationsaufgabe mit Splinefunktionen
- Beispiel einer kubischen Splineinterpolation
- Allgemeine Splineräume
- B-Splines

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie sieht die Interpolationsaufgabe mit kubischen Splines aus?
- Die kubische Splineinterpolation hat eine interessante Extremaleigenschaft.
- Die Interpolationsaufgabe mit kubischen Splines ist gut konditioniert.
- Wie sind die allgemeine Splineräume und die B-Splines definiert?

Einleitung

Allgemeine Interpolationsaufgabe

Gegeben seien Stützstellen $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, und Daten

$$f(x_0), \ldots, f(x_n) \in \mathbb{R}.$$

Es sei G_n ein endlich dimensionaler Raum stetiger Funktionen (dessen Dimension von n abhängt). Man bestimme $g_n \in G_n$, so dass

$$g_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

Einleitung

Allgemeine Interpolationsaufgabe

Gegeben seien Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, und Daten

$$f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}.$$

Es sei G_n ein endlich dimensionaler Raum stetiger Funktionen (dessen Dimension von n abhängt). Man bestimme $g_n \in G_n$, so dass

$$g_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

In diesem Kapitel ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$):

$$G_n := \left\{ g \in C^{k-2}([x_0, x_n]) \,|\, g_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_{k-1} \right\}, \quad k \geq 2$$

Kubische Splines

Stützstellen: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Daten: $f_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$

Raum der kubischen Splines:

$$\mathcal{P}_{4,\tau} := \left\{ g \in C^2([a,b]) \mid g_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, i = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

Kubische Splines

Stützstellen: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Daten: $f_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$

Raum der kubischen Splines:

$$\mathcal{P}_{4,\tau} := \left\{ g \in C^2([a,b]) \mid g_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, i = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

Es gilt: $\dim(\mathcal{P}_{4,\tau}) = n + 3$.

Kubische Splineinterpolation

Finde zu $f_j = f(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$ eine Funktion $S \in \mathcal{P}_{4,\tau}$, so dass

$$S(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$
$$S''(a) = S''(b) = 0.$$

Kubische Splines

Die Interpolationsaufgabe ist eindeutig lösbar und die Lösung hat eine interessante Extremaleigenschaft:

Lemma 9.3

Es sei g eine beliebige Funktion aus $C^2([a,b])$ mit $g(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ und $g''(a) = g''(b) = 0$. Für die eindeutige Lösung S der Interpolationsaufgabe gilt

$$\int_a^b S''(x)^2 \, dx \leq \int_a^b g''(x)^2 \, dx.$$

Kubische Splines

Die Interpolationsaufgabe ist eindeutig lösbar und die Lösung hat eine interessante Extremaleigenschaft:

Lemma 9.3

Es sei g eine beliebige Funktion aus $C^2([a,b])$ mit $g(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ und $g''(a) = g''(b) = 0$. Für die eindeutige Lösung S der Interpolationsaufgabe gilt

$$\int_a^b S''(x)^2 \, dx \leq \int_a^b g''(x)^2 \, dx.$$

Bedeutung: die Lösung S minimiert unter allen Funktionen $g \in C^2([a,b])$, die dieselben Interpolationsforderungen erfüllen, näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung.

Bestimmung der Lösung

Es seien x_j, $j = 0, \ldots, n$, äquidistante Stützstellen: $x_{j+1} - x_j = h$.

$$m_j := S''(x_j), \quad I_j := [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Wegen $S_{|I_j} \in \Pi_3$ ergibt sich, dass $S''_{|I_j}$ linear ist und dass

$$S''_{|I_j}(x) = \frac{(x_{j+1} - x)m_j + (x - x_j)m_{j+1}}{h}$$

Nach zweifacher Integration, mit $S(x_j) = f_j$ und $S(x_{j+1}) = f_{j+1}$:

$$\begin{aligned} S_{|I_j}(x) \quad &= \quad \frac{(x_{j+1} - x)^3 m_j + (x - x_j)^3 m_{j+1}}{6h} \\ &+ \frac{(x_{j+1} - x) f_j + (x - x_j) f_{j+1}}{h} \\ &- \frac{1}{6} h \left[(x_{j+1} - x) m_j + (x - x_j) m_{j+1} \right] \end{aligned}$$

Bestimmung der Lösung

Es gilt

$$\boldsymbol{S_{|I_j} \in \Pi_3, \quad S \in C([a,b]),}$$
$$\boldsymbol{S''_{|I_j}(x_{j+1}) = m_{j+1} = S''_{|I_{j+1}}(x_{j+1}).}$$

Bestimmung der Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} S_{|I_j} &\in \Pi_3, \quad S \in C([a,b]), \\ S''_{|I_j}(x_{j+1}) &= m_{j+1} = S''_{|I_{j+1}}(x_{j+1}). \end{aligned}$$

Die noch unbekannten Größen m_j werden so gewählt, dass

$$S'_{|I_{j-1}}(x_j) = S'_{|I_j}(x_j), \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

gilt. Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$m_{j-1} + 4m_j + m_{j+1} = \frac{6}{h^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}), \; 1 \le j \le n-1.$$

Bestimmung der Lösung

Wegen

$$m_0 = S''(a) = 0, \quad m_n = S''(b) = 0$$

Ergibt sich insgesamt das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_{n} \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Lösung

Wegen

$$m_0 = S''(a) = 0, \quad m_n = S''(b) = 0$$

Ergibt sich insgesamt das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung: allgemeinere Methode zur Berechnung einer Splineinterpolation unter Verwendung der B-Spline-Basis: Abschnitt 9.5.

Kondition

S: kubischer Spline zu Daten f_j, $j = 0, \ldots, n$.

$\tilde{S}$: kubischer Spline zu Daten $\tilde{f}_j$, $j = 0, \ldots, n$.

Kondition

Es gilt

$$\|\tilde{S} - S\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |\tilde{S}(x) - S(x)| \leq 3\tfrac{1}{2} \|\tilde{f} - f\|_\infty$$

$$\frac{\|\tilde{S} - S\|_\infty}{\|S\|_\infty} \leq 3\frac{1}{2} \frac{\|\tilde{f} - f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Kondition

S: kubischer Spline zu Daten f_j, $j = 0, \ldots, n$.

$\tilde{S}$: kubischer Spline zu Daten $\tilde{f}_j$, $j = 0, \ldots, n$.

Kondition

Es gilt

$$\|\tilde{S} - S\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |\tilde{S}(x) - S(x)| \leq 3\tfrac{1}{2} \|\tilde{f} - f\|_\infty$$

$$\frac{\|\tilde{S} - S\|_\infty}{\|S\|_\infty} \leq 3\frac{1}{2} \frac{\|\tilde{f} - f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Die Kondition der kubischen Interpolation, im Falle äquidistanter Stützstellen, ist gut. Insbesondere hängt die Konditionszahl nicht von der Anzahl der Stützstellen ab.

Beispiel 9.5

Daten

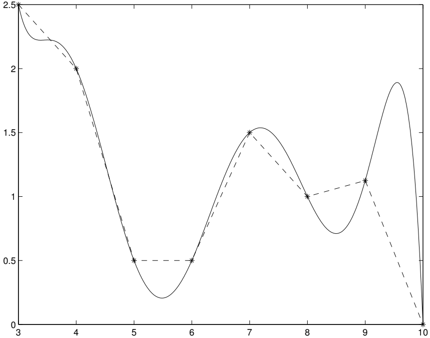
i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	2.5	2.0	0.5	0.5	1.5	1.0	1.125	0.0

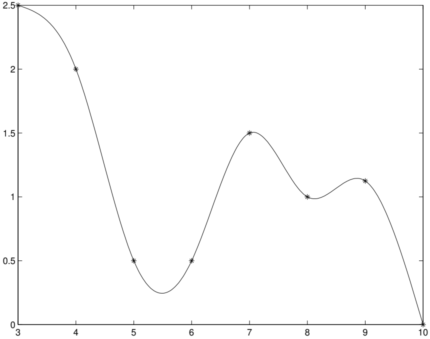
Das zugehörige System:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 1 \\ -1.5 \\ 0.625 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

Beispiel 9.5

Das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad 7, die stückweise lineare Interpolation und die kubische Splineinterpolation:





Ordnung von Splines

Vorbemerkung:

Bei der Behandlung von Splines ist es bequemer, statt mit dem Grad von Polynomen, mit der Ordnung

$$\boldsymbol{k := \mathbf{Grad} + 1}$$

zu arbeiten.

Spline-Raum

Für eine Knotenmenge $\tau = \{\tau_0, \ldots, \tau_{\ell+1}\}$ mit

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_\ell < \tau_{\ell+1} = b \text{ und } k \geq 1$$

ist der Spline-Raum der Splines der Ordnung k:

Für $k = 1$:

$$\mathcal{P}_{1,\tau} = \{ f : [a,b) \to \mathbb{R} \mid f\big|_{[\tau_i,\tau_{i+1})} \in \Pi_0, \;\; 0 \leq i \leq \ell \}.$$

Für $k \geq 2$:

$$\mathcal{P}_{k,\tau} = \{ f \in C^{k-2}([a,b]) \mid f\big|_{[\tau_i,\tau_{i+1})} \in \Pi_{k-1}, \; 0 \leq i \leq \ell \}.$$

Für $k = 4$ ergibt sich gerade der Raum der kubischen Splines.

Eigenschaften

Lemma 9.7

$$\dim \mathcal{P}_{k,\tau} = k + \ell$$

Eigenschaften

Lemma 9.7

$$\dim \mathcal{P}_{k,\tau} = k + \ell$$

Es sei

$$h = \max_{j=0,\dots,\ell} (\tau_{j+1} - \tau_j) \quad \text{und} \quad \|g\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \quad (g \in C([a,b]$$

Satz 9.8

Für jedes $k \geq 2$ existiert eine positive Konstante $c < \infty$, so dass für jedes $m \leq k$ und jede Funktion $f \in C^m([a,b])$ gilt

$$\min_{S_k \in \mathcal{P}_{k,\tau}} \|f - S_k\|_\infty \leq c h^m \|f^{(m)}\|_\infty$$

Basis des Splineraumes

Da jedes Polynom insbesondere ein stückweises Polynom ist, das zudem sogar unendlich oft differenzierbar ist, gilt

$$\Pi_{k-1} \subset \mathcal{P}_{k,\tau}.$$

Außerdem sieht man leicht, dass

$$(\tau_i - x)_+^{k-1} \in \mathcal{P}_{k,\tau}, \quad i = 1, \ldots, \ell,$$

wobei, für $m \geq 0$,

$$y_+^m = \begin{cases} y^m & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } y \leq 0, \end{cases}$$

die sogenannten abgebrochenen Potenzen sind.

Basis des Splineraumes

Die $k + \ell$ Funktionen

$$x^i, \quad i = 0, \dots, k-1,$$

und

$$(\tau_i - x)_+^{k-1}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

sind linear unabhängig.

Basis des Splineraumes

Die $k + \ell$ Funktionen

$$x^i, \quad i = 0, \ldots, k-1,$$

und

$$(\tau_i - x)_+^{k-1}, \quad i = 1, \ldots, \ell,$$

sind linear unabhängig.

Diese Funktionen bilden also eine Basis für $\mathcal{P}_{k,\tau}$.
Diese Basis ist für praktische Zwecke ungeeignet.

Eine viel bessere Basis für $\mathcal{P}_{k,\tau}$ bilden die sogenannten B-Splines.

B-Splines

B-Splines sind stückweise Polynome bezüglich einer Knotenmenge. Es sei

$$t_1 < t_2 \ldots < t_n$$

eine solche Knotenmenge, die mit der im Splineraum verwendeten Knotenmenge $\tau_0, \ldots, \tau_{\ell+1}$ vorläufig nichts zu tun hat.

B-Splines

B-Splines sind stückweise Polynome bezüglich einer Knotenmenge. Es sei

$$t_1 < t_2 \ldots < t_n$$

eine solche Knotenmenge, die mit der im Splineraum verwendeten Knotenmenge $\tau_0, \ldots, \tau_{\ell+1}$ vorläufig nichts zu tun hat.

Der Fall $k = 1$. Die einfachsten stückweisen Polynomen sind die charakteristischen Funktionen

$$N_{j,1}(x) := \chi_{[t_j, t_{j+1})}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [t_j, t_{j+1}), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \quad j = 0, \ldots, n-$$

B-Splines

B-Splines sind stückweise Polynome bezüglich einer Knotenmenge.
Es sei

$$t_1 < t_2 \ldots < t_n$$

eine solche Knotenmenge, die mit der im Splineraum verwendeten Knotenmenge $\tau_0, \ldots, \tau_{\ell+1}$ vorläufig nichts zu tun hat.
Der Fall $k = 1$. Die einfachsten stückweisen Polynomen sind die charakteristischen Funktionen

$$N_{j,1}(x) := \chi_{[t_j,t_{j+1})}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [t_j, t_{j+1}), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \quad j = 0, \ldots, n-$$

Der Träger (engl. „support“) der Funktion $N_{j,1}$:

$$\operatorname{supp} N_{j,1} := \{x \in \mathbb{R} \mid N_{j,1}(x) \neq 0\}$$

Die Funktionen $N_{j,1}$, $0 \leq j \leq n-1$, haben einen lokalen Träger.

B-Splines

Jede stückweise konstante Funktion bezüglich der Knotenmenge $t_1 < \ldots < t_n$ lässt sich als Linearkombination der $N_{j,1}$ schreiben

$$S(x) = \sum_{j=0}^{\ell} c_j \, N_{j,1}(x).$$

Die Funktion S lässt sich mit dem Koeffizientenvektor $c = (c_j)_{j=0}^{\ell}$ identifizieren.

Es gilt

$$\|\mathbf{c}\|_\infty = \left\| \sum_{j=0}^{\ell} c_j \, N_{j,1} \right\|_\infty = \|S\|_\infty$$

Die Basis ist in diesem Sinne stabil.

B-Splines

Der Fall $k = 2$. Stückweise lineare Funktionen kann man einfach rekursiv aus den charakteristischen Funktionen konstruieren:

$$N_{j,2}(x) := \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} N_{j,1}(x) + \frac{t_{j+2} - x}{t_{j+2} - t_{j+1}} N_{j+1,1}(x),$$

$j = 1, \ldots, n - 2$.

B-Splines

Der Fall $k = 2$. Stückweise lineare Funktionen kann man einfach rekursiv aus den charakteristischen Funktionen konstruieren:

$$N_{j,2}(x) := \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} N_{j,1}(x) + \frac{t_{j+2} - x}{t_{j+2} - t_{j+1}} N_{j+1,1}(x),$$

$j = 1, \ldots, n - 2$.

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

1) von Null verschiedene Werte nur auf dem Intervall $[t_j, t_{j+2}]$;

2) auf jedem der beiden Intervalle $[t_j, t_{j+1}]$, $[t_{j+1}, t_{j+2}]$ ist $N_{j,2}$ linear;

3) $N_{j,2}$ ist stetig.

Definition B-Splines

Definition 9.11

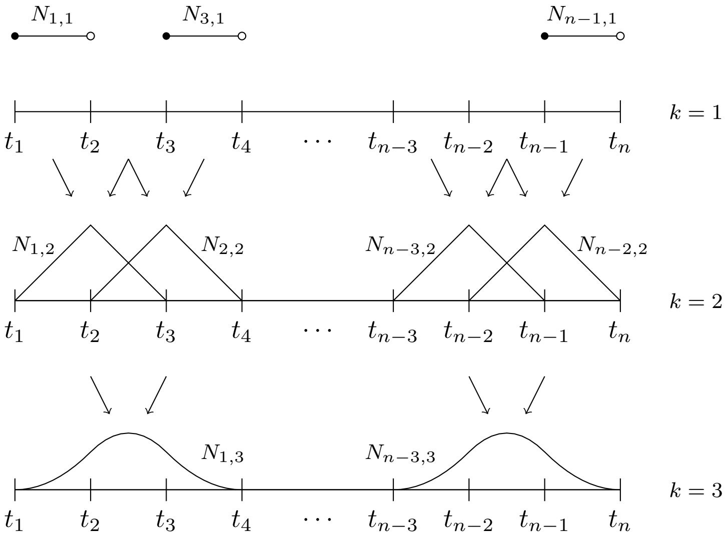
Sei $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ eine Menge von paarweise verschiedenen Knoten. Dann werden die B-Splines $N_{j,k}$ der Ordnung k $(1 \leq k < n)$ rekursiv definiert durch

$$
\begin{aligned}
N_{j,1}(x) &:= \chi_{[t_j, t_{j+1})}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\
N_{j,k}(x) &:= \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} N_{j,k-1}(x) \\
&\qquad + \frac{t_{j+k} - x}{t_{j+k} - t_{j+1}} N_{j+1,k-1}(x),
\end{aligned}
$$

für $k = 2, \dots, n-1$, und $j = 1, \dots, n-k$.

Beachte dass die Anzahl $n - k$ von k abhängt.

B-Splines $N_{j,k}$, $k = 1, 2, 3$.



Eigenschaften von B-Splines

Lemma 9.12

Für die B-Splines $N_{j,k}$ gilt:

(i) $\operatorname{supp} N_{j,k} \subset [t_j, t_{j+k}]$,

(ii) $N_{j,k}(x) > 0$ für alle $x \in (t_j, t_{j+k})$,

(iii) $(N_{j,k})\big|_{[t_i,t_{i+1})} \in \Pi_{k-1}$,

(iv) $\sum_{j=1}^{n-k} N_{j,k}(x) = 1$ für alle $x \in [t_k, t_{n-k+1}]$.

Zusammenfassung

- Die eindeutige Lösung der kubischen Splineinterpolation hat eine Extremaleigenschaft die bedeutet dass näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung minimiert wird.

Zusammenfassung

- Die eindeutige Lösung der kubischen Splineinterpolation hat eine Extremaleigenschaft die bedeutet dass näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung minimiert wird.
- Die Lösung der kubischen Splineinterpolation mit äquidistanten Stützstellen lässt sich mittels eines linearen Gleichungssystems mit einer symmetrisch positiven Tridiagonalmatrix bestimmen.

Zusammenfassung

- Die eindeutige Lösung der kubischen Splineinterpolation hat eine Extremaleigenschaft die bedeutet dass näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung minimiert wird.
- Die Lösung der kubischen Splineinterpolation mit äquidistanten Stützstellen lässt sich mittels eines linearen Gleichungssystems mit einer symmetrisch positiven Tridiagonalmatrix bestimmen.
- Die kubische Splineinterpolationsaufgabe mit äquidistanten Stützstellen ist gut konditioniert.

Zusammenfassung

- Die eindeutige Lösung der kubischen Splineinterpolation hat eine Extremaleigenschaft die bedeutet dass näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung minimiert wird.
- Die Lösung der kubischen Splineinterpolation mit äquidistanten Stützstellen lässt sich mittels eines linearen Gleichungssystems mit einer symmetrisch positiven Tridiagonalmatrix bestimmen.
- Die kubische Splineinterpolationsaufgabe mit äquidistanten Stützstellen ist gut konditioniert.
- Der Splineraum der Splines der Ordnung k mit $\ell + 2$ Knoten hat Dimension $k + \ell$.

Zusammenfassung

- Die eindeutige Lösung der kubischen Splineinterpolation hat eine Extremaleigenschaft die bedeutet dass näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung minimiert wird.
- Die Lösung der kubischen Splineinterpolation mit äquidistanten Stützstellen lässt sich mittels eines linearen Gleichungssystems mit einer symmetrisch positiven Tridiagonalmatrix bestimmen.
- Die kubische Splineinterpolationsaufgabe mit äquidistanten Stützstellen ist gut konditioniert.
- Der Splineraum der Splines der Ordnung $\boldsymbol{k}$ mit $\boldsymbol{\ell + 2}$ Knoten hat Dimension $\boldsymbol{k + \ell}$.
- Die Genauigkeit mit der glatte Funktionen mit Splines approximiert werden können wird in Satz 9.8 beschrieben.

Zusammenfassung

- Die eindeutige Lösung der kubischen Splineinterpolation hat eine Extremaleigenschaft die bedeutet dass näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung minimiert wird.
- Die Lösung der kubischen Splineinterpolation mit äquidistanten Stützstellen lässt sich mittels eines linearen Gleichungssystems mit einer symmetrisch positiven Tridiagonalmatrix bestimmen.
- Die kubische Splineinterpolationsaufgabe mit äquidistanten Stützstellen ist gut konditioniert.
- Der Splineraum der Splines der Ordnung k mit $\ell + 2$ Knoten hat Dimension $k + \ell$.
- Die Genauigkeit mit der glatte Funktionen mit Splines approximiert werden können wird in Satz 9.8 beschrieben.
- Die B-splines werden rekursiv definiert.