

# Kapitel 10

Buch Dahmen-Reusken

RWTH Aachen University

2022

# Problemstellung

Die numerische Berechnung von Integralen (auch **Quadratur** genannt):

## Problemstellung

Konstruktion von Näherungsformeln für ein **eindimensionales** Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

einer stetigen Funktion  $f \in C([a, b])$ .

# Problemstellung

Die numerische Berechnung von Integralen (auch **Quadratur** genannt):

## Problemstellung

Konstruktion von Näherungsformeln für ein **eindimensionales** Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

einer stetigen Funktion  $f \in C([a, b])$ .

Diese Aufgabe kann man als die Aufgabe der Auswertung des linearen Funktionals

$$L : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(f) = \int_a^b f(x) dx$$

auffassen. Insbesondere ist die gesuchte Lösung eine **skalare** Größe.

# Kondition

Sei  $I = \int_a^b f(x) dx$ ,  $\tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$ . Es gilt:

$$|I - \tilde{I}| = \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx$$

# Kondition

Sei  $I = \int_a^b f(x) dx$ ,  $\tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} |I - \tilde{I}| &= \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq (b - a) \|f - \tilde{f}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

⇒ absolute Kondition ist gut.

# Kondition

Sei  $I = \int_a^b f(x) dx$ ,  $\tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} |I - \tilde{I}| &= \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq (b - a) \|f - \tilde{f}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  absolute Kondition ist gut.

$$\frac{|I - \tilde{I}|}{|I|} \leq (b - a) \frac{\|f - \tilde{f}\|_{\infty}}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|} =$$

## Kondition

Sei  $I = \int_a^b f(x) dx$ ,  $\tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} |I - \tilde{I}| &= \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq (b - a) \|f - \tilde{f}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

⇒ absolute Kondition ist gut.

$$\frac{|I - \tilde{I}|}{|I|} \leq (b - a) \frac{\|f - \tilde{f}\|_{\infty}}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|} = \underbrace{\frac{\int_a^b \|f\|_{\infty} dx}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|}}_{= \kappa_{\text{rel}}} \frac{\|f - \tilde{f}\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}}.$$

## Kondition

Sei  $I = \int_a^b f(x) dx$ ,  $\tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} |I - \tilde{I}| &= \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq (b - a) \|f - \tilde{f}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

⇒ absolute Kondition ist gut.

$$\frac{|I - \tilde{I}|}{|I|} \leq (b - a) \frac{\|f - \tilde{f}\|_{\infty}}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|} = \underbrace{\frac{\int_a^b \|f\|_{\infty} dx}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|}}_{= \kappa_{\text{rel}}} \frac{\|f - \tilde{f}\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}}.$$

⇒ relative Kondition **kann** schlecht sein.



# Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

# Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile  $[a, b]$  in Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  z.B. mit  $t_j = a + jh, j = 0, \dots, n, h = (b - a)/n$ .

# Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile  $[a, b]$  in Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  z.B. mit  $t_j = a + jh$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $h = (b - a)/n$ .
2. **Approximiere**  $f$  auf jedem Intervall  $[t_{k-1}, t_k]$  durch eine **einfach zu integrierende Funktion**  $g_k$ , und verwende

$$\int_a^b f(x) dx =$$

# Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile  $[a, b]$  in Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  z.B. mit  $t_j = a + jh$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $h = (b - a)/n$ .
2. **Approximiere  $f$**  auf jedem Intervall  $[t_{k-1}, t_k]$  durch eine **einfach zu integrierende Funktion  $g_k$** , und verwende

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx$$

# Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx \approx ?$$

lässt sich folgendermaßen umreißen:

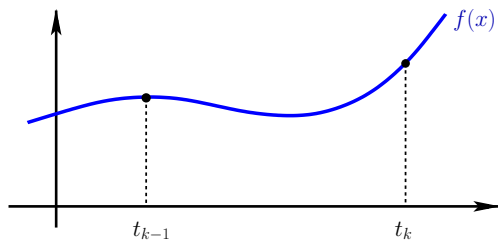
1. Man unterteile  $[a, b]$  in Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  z.B. mit  $t_j = a + jh, j = 0, \dots, n, h = (b - a)/n$ .
2. **Approximiere**  $f$  auf jedem Intervall  $[t_{k-1}, t_k]$  durch eine **einfach zu integrierende Funktion**  $g_k$ , und verwende

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx$$

als Näherung für das exakte Integral.

# Trapezregel

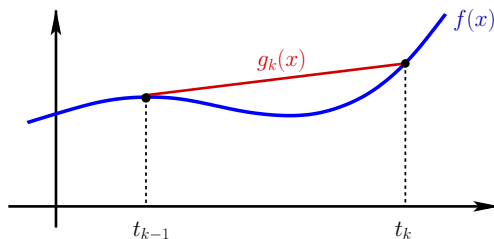
- ▶ Lineare Interpolation an den Intervallenden von  $[t_{k-1}, t_k]$ , d.h.



# Trapezregel

- ▶ Lineare Interpolation an den Intervallenden von  $[t_{k-1}, t_k]$ , d.h.

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

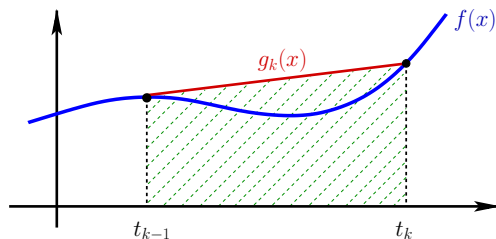


# Trapezregel

- ▶ Lineare Interpolation an den Intervallenden von  $[t_{k-1}, t_k]$ , d.h.

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

- ▶ Das Integral ist damit gegeben durch





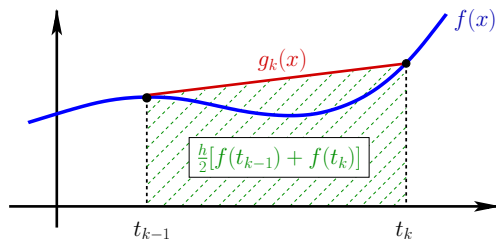
# Trapezregel

- ▶ Lineare Interpolation an den Intervallenden von  $[t_{k-1}, t_k]$ , d.h.

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

- ▶ Das Integral ist damit gegeben durch

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx = \frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)]$$



# Summierte Trapezregel

Wiederholtes Anwenden der Trapezregel auf jedem Teilintervall  $[t_{k-1}, t_k]$  als Näherung für  $\int_a^b f(x) dx$  liefert die

# Summierte Trapezregel

Wiederholtes Anwenden der Trapezregel auf jedem Teilintervall  $[t_{k-1}, t_k]$  als Näherung für  $\int_a^b f(x) dx$  liefert die

## Summierte Trapezregel

$$T(h) = h \left[ \frac{1}{2}f(a) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

# Summierte Trapezregel

Wiederholtes Anwenden der Trapezregel auf jedem Teilintervall  $[t_{k-1}, t_k]$  als Näherung für  $\int_a^b f(x) dx$  liefert die

## Summierte Trapezregel

$$T(h) = h \left[ \frac{1}{2}f(a) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

Für den Verfahrensfehler der Teilintegrale gilt folgende Darstellung:

### Lemma 10.1

Sei  $f \in C^2([t_{k-1}, t_k])$ . Es gilt für geeignetes  $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ :

$$\frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx + \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3$$

# Summierte Trapezregel

Für den Verfahrensfehler von  $T(h)$  ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3 \right| \\ &\leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n |f''(\xi_k)| \leq \frac{h^3}{12} n \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \end{aligned}$$

# Summierte Trapezregel

Für den Verfahrensfehler von  $T(h)$  ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3 \right| \\ &\leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n |f''(\xi_k)| \leq \frac{h^3}{12} n \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \end{aligned}$$

Mit  $nh = b - a$  ergibt sich insgesamt die

## Fehlerschranke

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{h^2}{12} (b - a) \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

# Summierte Trapezregel

Ebenfalls erhält man wegen

$$E(h) := T(h) - \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n h^3 \frac{f''(\xi_k)}{12} = \frac{h^2}{12} \sum_{k=1}^n h f''(\xi_k)$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h^2} = \frac{1}{12} \int_a^b f''(x) dx = \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a))$$

# Summierte Trapezregel

Ebenfalls erhält man wegen

$$E(h) := T(h) - \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n h^3 \frac{f''(\xi_k)}{12} = \frac{h^2}{12} \sum_{k=1}^n h f''(\xi_k)$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h^2} = \frac{1}{12} \int_a^b f''(x) dx = \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a))$$

die

## Fehlerschätzung

$$E(h) \approx \hat{E}(h) := \frac{h^2}{12} (f'(b) - f'(a))$$



## Beispiel 10.2

Zur näherungsweise Berechnung von

$$I = \int_0^{\pi/2} (x \cos x + e^x) dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

mit der Trapezregel ergeben sich die in folgender Tabelle angegebenen Näherungswerte, Verfahrensfehler und Fehlerschätzungen.

$n$	$T(h)$	$ E(h)  =  T(h) - I $	$ \hat{E}(h)  = \frac{h^2}{12}  f'(\frac{\pi}{2}) - f'(0) $
4	4.396928	1.57e-02	1.59e-02
8	4.385239	3.97e-03	3.98e-03
16	4.382268	9.95e-04	9.96e-04
32	4.381523	2.49e-04	2.49e-04

# Interpolatorische Quadratur

- ▶ Für ein typisches Teilintervall  $[t_{k-1}, t_k]$  stehe der Einfachheit halber im Folgenden  $[c, d]$ .
- ▶ Seien nun  $x_0, \dots, x_m \in [c, d]$  paarweise verschiedene Punkte.

## Interpolatorische Quadraturformel

$$I_m(f) := \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx$$

# Interpolatorische Quadratur

- ▶ Für ein typisches Teilintervall  $[t_{k-1}, t_k]$  stehe der Einfachheit halber im Folgenden  $[c, d]$ .
- ▶ Seien nun  $x_0, \dots, x_m \in [c, d]$  paarweise verschiedene Punkte.

## Interpolatorische Quadraturformel

$$I_m(f) := \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx$$

### Satz 10.4

Sei  $I_m(f)$  wie oben. Für jedes Polynom  $Q \in \Pi_m$  gilt

$$I_m(Q) = \int_c^d Q(x) dx.$$

Man sagt, die Quadraturformel ist **exakt vom Grade  $m$** .

# Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx$$

# Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx = \int_c^d \sum_{j=0}^m f(x_j) \ell_{jm}(x) dx$$

# Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\begin{aligned}\int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx &= \int_c^d \sum_{j=0}^m f(x_j) \ell_{jm}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^m f(x_j) \int_c^d \ell_{jm}(x) dx\end{aligned}$$

# Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\begin{aligned}
 \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx &= \int_c^d \sum_{j=0}^m f(x_j) \ell_{jm}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^m f(x_j) \int_c^d \ell_{jm}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^m f(x_j) \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx
 \end{aligned}$$

# Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\begin{aligned}
 \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx &= \int_c^d \sum_{j=0}^m f(x_j) \ell_{jm}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^m f(x_j) \int_c^d \ell_{jm}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^m f(x_j) \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx \\
 &= h \sum_{j=0}^m f(x_j) \underbrace{\frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx}_{\text{}}
 \end{aligned}$$



# Interpolatorische Quadratur

Wir erhalten damit als Näherung für das exakte Integral

$$\begin{aligned}
 \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx &= \int_c^d \sum_{j=0}^m f(x_j) \ell_{jm}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^m f(x_j) \int_c^d \ell_{jm}(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^m f(x_j) \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx \\
 &= h \sum_{j=0}^m f(x_j) \underbrace{\frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx}_{c_j} \\
 &= h \sum_{j=0}^m f(x_j) \cdot c_j
 \end{aligned}$$

# Interpolatorische Quadratur

## Lemma 10.5

Die interpolatorische Quadraturformel  $I_m(f)$  hat die Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j),$$

wobei  $h = d - c$ . Die  $c_j$  sind durch

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x) dx$$

gegeben, wobei  $\ell_{jm}$  ( $0 \leq j \leq m$ ) die Lagrange-Fundamental-Polynome zu den Stützstellen  $x_0, \dots, x_m$  sind.

## Allgemeine Quadraturformel

## Lemma 10.6

Sei  $\hat{I}_m(f) = \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$  eine **allgemeine** Quadraturformel mit

$$\hat{I}_m(Q) = \int_c^d Q(x) dx \quad \text{für alle } Q \in \Pi_m.$$

Dann gilt

$$w_j = hc_j, \quad \text{mit } c_j \text{ aus Lemma 10.5, für alle } j = 0, \dots, n.$$

# Newton-Cotes-Formeln

Wählt man speziell die Stützstellen  $x_j$  äquidistant

$$x_0 = c + \frac{1}{2}h =: c + \mu_0 h, \quad \text{wenn } m = 0$$

$$x_j = c + \frac{j}{m}h =: c + \mu_j h, \quad j = 0, \dots, m, \quad \text{wenn } m > 0,$$

erhält man die **Newton-Cotes-Formeln**.

# Newton-Cotes-Formeln

Wählt man speziell die Stützstellen  $x_j$  äquidistant

$$x_0 = c + \frac{1}{2}h =: c + \mu_0 h, \quad \text{wenn } m = 0$$

$$x_j = c + \frac{j}{m}h =: c + \mu_j h, \quad j = 0, \dots, m, \quad \text{wenn } m > 0,$$

erhält man die **Newton-Cotes-Formeln**.

## Beispiel

Für  $m = 1$  erhalten wir  $x_0 = c$  ( $\mu_0 = 0$ ),  $x_1 = d$  ( $\mu_1 = 1$ ) und

$$c_0 = \frac{1}{h} \int_c^d \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{h} \int_c^d \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \frac{1}{2}$$

# Newton-Cotes-Formeln

Man kann die interpolatorische Quadraturformel in der Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(c + \mu_j h)$$

mit normierten Stützstellen  $\mu_j$  und Gewichten  $c_j$  schreiben, die jetzt unabhängig vom speziellen Intervall  $[c, d]$  sind, z.B.

# Newton-Cotes-Formeln

Man kann die interpolatorische Quadraturformel in der Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(c + \mu_j h)$$

mit normierten Stützstellen  $\mu_j$  und Gewichten  $c_j$  schreiben, die jetzt unabhängig vom speziellen Intervall  $[c, d]$  sind, z.B.

$m$		$\mu_j$	$c_j$	$I_m(f) - \int_c^d f(x) dx$
0	Mittelpunktsregel	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{24}h^3 f^{(2)}(\xi)$
1	Trapezregel	0, 1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}(\frac{1}{2}h)^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$ -Regel	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{80}(\frac{1}{3}h)^5 f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$\frac{8}{945}(\frac{1}{4}h)^7 f^{(6)}(\xi)$

## Summierte Newton-Cotes-Formeln

Beispiel: Summierte Simpson-Regel

$$S(h) = \int_a^b f(x)dx + E(h) \quad \text{mit}$$

$$S(h) = \frac{h}{6} \left[ f(t_0) + 4f\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right) + 2f(t_1) + 4f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) + 2f(t_2) + \cdots + 2f(t_{n-1}) + 4f\left(\frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) + f(t_n) \right]$$



## Summierte Newton-Cotes-Formeln

Beispiel: Summierte Simpson-Regel

$$S(h) = \int_a^b f(x) dx + E(h) \quad \text{mit}$$

$$S(h) = \frac{h}{6} \left[ f(t_0) + 4f\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right) + 2f(t_1) + 4f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) + 2f(t_2) + \cdots + 2f(t_{n-1}) + 4f\left(\frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) + f(t_n) \right]$$

und Fehlerdarstellung

$$E(h) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{90} \left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi_k) = \frac{h^4}{2880} \sum_{k=1}^n h f^{(4)}(\xi_k),$$

für  $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ .

# Summierte Simpson-Regel

Es gilt, wegen  $nh = b - a$ ,

$$|E(h)| \leq \frac{h^4}{2880} (b - a) \|f^{(4)}\|_\infty$$

$$E(h) \approx \frac{h^4}{2880} \int_a^b f^{(4)}(x) dx = \frac{h^4}{2880} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))$$

## Beachte

Beim **Aufsummieren** der einzelnen Teilintegrale,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx,$$

geht im Fehler eine  $h$ -Potenz verloren.

## Beispiel 10.7

Wie in Beispiel 10.2 ergeben sich für die näherungsweise Berechnung von

$$I = \int_0^{\pi/2} (x \cos x + e^x) dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

folgende Resultate:

$n$	$S(h)$	$ E(h) $	$\frac{h^4}{2880}  f^{(3)}(\frac{\pi}{2}) - f^{(3)}(0) $
4	4.381343022	6.93e-05	6.92e-05
8	4.381278035	4.33e-06	4.33e-06
16	4.381273978	2.70e-07	2.70e-07
32	4.381273725	1.69e-08	1.69e-08

# Gauß-Quadratur

## Zielvorgabe

Für festes  $m \in \mathbb{N}$ , wähle die Stützstellen  $x_0, \dots, x_m$ , so dass die interpolatorische Quadraturformel

$$h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx$$

(mit  $c_j$  wie in Lemma 10.5) **einen möglichst hohen Exaktheitsgrad  $n$  hat:**

$$\int_c^d Q(x) dx = h \sum_{j=0}^m c_j Q(x_j), \quad \text{für alle } Q \in \Pi_n.$$

# Gauß-Quadratur

## Zielvorgabe

Für festes  $m \in \mathbb{N}$ , wähle die Stützstellen  $x_0, \dots, x_m$ , so dass die interpolatorische Quadraturformel

$$h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx$$

(mit  $c_j$  wie in Lemma 10.5) **einen möglichst hohen Exaktheitsgrad  $n$  hat:**

$$\int_c^d Q(x) dx = h \sum_{j=0}^m c_j Q(x_j), \quad \text{für alle } Q \in \Pi_n.$$

**Zur Erinnerung:** Der Exaktheitsgrad bei Newton-Cotes-Formeln  $I_m(f)$  ist entweder  $m$  oder  $m + 1$ .

# Gauß-Quadratur

- ▶ Exaktheitsgrad kann **höchstens**  $2m + 1$  sein.

# Gauß-Quadratur

- ▶ Exaktheitsgrad kann **höchstens**  $2m + 1$  sein.

## Satz 10.9

Sei  $m \geq 0$ . Es existieren Stützstellen  $x_0, \dots, x_m \in (c, d)$ , so dass mit  $h = d - c$  für die interpolatorische Quadraturformel

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j) := \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx$$

gilt  $I_m(Q) = \int_c^d Q(x) dx$  für alle  $Q \in \Pi_{2m+1}$ . Die Gewichte  $c_j$  sind **positiv**. Ferner existiert ein  $\xi \in [c, d]$ , so dass gilt

$$\left| I_m(f) - \int_c^d f(x) dx \right| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3 (2m+3)} h^{2m+3} |f^{(2m+2)}(\xi)|$$

## Beispiel 10.10

- ▶ **Aufgabe:** Berechnung der Stützstellen und Gewichte der Gauß-Quadratur für  $[c, d] = [-1, 1]$  und  $m = 1$ .



## Beispiel 10.10

- ▶ **Aufgabe:** Berechnung der Stützstellen und Gewichte der Gauß-Quadratur für  $[c, d] = [-1, 1]$  und  $m = 1$ .
- ▶ Die Gauß-Quadraturformel

$$I_1(f) = 2(c_0f(x_0) + c_1f(x_1))$$

muss für  $p \in \Pi_3$  exakt sein, d.h.

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 2(c_0p(x_0) + c_1p(x_1))$$

für  $p(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$ .

## Beispiel 10.10

- ▶ **Aufgabe:** Berechnung der Stützstellen und Gewichte der Gauß-Quadratur für  $[c, d] = [-1, 1]$  und  $m = 1$ .
- ▶ Die Gauß-Quadraturformel

$$I_1(f) = 2(c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1))$$

muss für  $p \in \Pi_3$  exakt sein, d.h.

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 2(c_0 p(x_0) + c_1 p(x_1))$$

für  $p(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$ .

- ▶ Aus

$$\int_{-1}^1 x^k dx = 2(c_0 x_0^k + c_1 x_1^k), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

erhält man die Gleichungen ...

## Beispiel 10.10

erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= 2(c_0 + c_1), & 0 &= 2(c_0x_0 + c_1x_1), \\ \frac{2}{3} &= 2(c_0x_0^2 + c_1x_1^2), & 0 &= 2(c_0x_0^3 + c_1x_1^3). \end{aligned}$$

## Beispiel 10.10

erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}2 &= 2(c_0 + c_1), & 0 &= 2(c_0x_0 + c_1x_1), \\ \frac{2}{3} &= 2(c_0x_0^2 + c_1x_1^2), & 0 &= 2(c_0x_0^3 + c_1x_1^3).\end{aligned}$$

- Dieses **nichtlineare Gleichungssystem** hat genau zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}c_0 = c_1 = \frac{1}{2}, \quad x_0 &= -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ c_0 = c_1 = \frac{1}{2}, \quad x_0 &= \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

## Beispiel 10.10

erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}2 &= 2(c_0 + c_1), & 0 &= 2(c_0x_0 + c_1x_1), \\ \frac{2}{3} &= 2(c_0x_0^2 + c_1x_1^2), & 0 &= 2(c_0x_0^3 + c_1x_1^3).\end{aligned}$$

- Dieses **nichtlineare Gleichungssystem** hat genau zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}c_0 = c_1 = \frac{1}{2}, \quad x_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ c_0 = c_1 = \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx I_1(f) = 2 \left( \frac{1}{2} f \left( -\frac{1}{3}\sqrt{3} \right) + \frac{1}{2} f \left( \frac{1}{3}\sqrt{3} \right) \right)$$

Gauß-Formeln für  $[c, d] = [-1, 1]$ 

$m$	$x_j$	$c_j$
0	0	1
1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{5}\sqrt{15}, 0, \frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{5}{18}, \frac{8}{18}, \frac{5}{18}$
3	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ $\pm\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{72}, \frac{18-\sqrt{30}}{72}$ $\frac{18+\sqrt{30}}{72}, \frac{18+\sqrt{30}}{72}$

# Stabilität der Gauß-Quadratur

Bei der Gauß-Quadratur: die Gewichte  $c_j$  sind immer **positiv**.  
Betrachte  $f$  mit einem festen Vorzeichen auf dem Teilintervall  $[c, d]$ .  
In  $I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$  haben **alle Summanden dasselbe Vorzeichen** und deshalb treten **keine Auslöschungseffekte** auf.

# Stabilität der Gauß-Quadratur

Bei der Gauß-Quadratur: die Gewichte  $c_j$  sind immer **positiv**.  
Betrachte  $f$  mit einem festen Vorzeichen auf dem Teilintervall  $[c, d]$ .  
In  $I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$  haben **alle Summanden dasselbe Vorzeichen** und deshalb treten **keine Auslöschungseffekte** auf.

Falls  $\tilde{f}$  ein gestörter Integrand ist, so gilt wegen  $\sum_{j=0}^m c_j = 1$ ,

$$|I_m(f) - I_m(\tilde{f})| \leq h \sum_{j=0}^m c_j \max_{0 \leq j \leq m} |f(x_j) - \tilde{f}(x_j)| \leq h \|f - \tilde{f}\|_\infty$$



# Stabilität der Gauß-Quadratur

Bei der Gauß-Quadratur: die Gewichte  $c_j$  sind immer **positiv**.  
Betrachte  $f$  mit einem festen Vorzeichen auf dem Teilintervall  $[c, d]$ .  
In  $I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$  haben **alle Summanden dasselbe Vorzeichen** und deshalb treten **keine Auslöschungseffekte** auf.

Falls  $\tilde{f}$  ein gestörter Integrand ist, so gilt wegen  $\sum_{j=0}^m c_j = 1$ ,

$$|I_m(f) - I_m(\tilde{f})| \leq h \sum_{j=0}^m c_j \max_{0 \leq j \leq m} |f(x_j) - \tilde{f}(x_j)| \leq h \|f - \tilde{f}\|_\infty$$

⇒ Der Fehler in der Quadraturformel ist maximal von derselben Größenordnung wie der wegen der (absoluten) Kondition des Problems unvermeidbare Fehler.

Das Quadraturverfahren ist also in diesem Sinne stabil.

# Numerische Tests

- ▶ Betrachte Quadraturformel

$$I_{k,n} \approx \int_a^b f(x) dx = I(f),$$

wobei  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle mit Länge  $(b - a)/n = h$  unterteilt wird und auf jedem Teilintervall eine Gauß-Quadratur mit  $k = m + 1$  Stützstellen angewandt wird.

# Numerische Tests

- ▶ Betrachte Quadraturformel

$$I_{k,n} \approx \int_a^b f(x) dx = I(f),$$

wobei  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle mit Länge  $(b - a)/n = h$  unterteilt wird und auf jedem Teilintervall eine Gauß-Quadratur mit  $k = m + 1$  Stützstellen angewandt wird.

- ▶ Für glatte Funktionen (d.h.  $|f^{(2k)}|$  wird nicht allzu groß, wenn  $k$  größer wird) wird die Genauigkeit der Gauß-Quadratur im Wesentlichen durch den Faktor  $C_{k,h}$  bestimmt:

$$C_{k,h} := \frac{(k!)^4}{((2k)!)^3(2k+1)} h^{2k+1}$$

Wir erhalten folgende Werte ...

## Numerische Test

$h = (b - a)/n$	$k = 2$	$k = 4$	$k = 8$
4	2.4e-01	1.5e-04	2.9e-13
2	7.4e-03	2.9e-07	2.2e-18
1	2.3e-04	5.6e-10	1.7e-23
0.5	7.2e-06	1.1e-12	1.3e-28

## Numerische Test

$h = (b - a)/n$	$k = 2$	$k = 4$	$k = 8$
4	2.4e-01	1.5e-04	2.9e-13
2	7.4e-03	2.9e-07	2.2e-18
1	2.3e-04	5.6e-10	1.7e-23
0.5	7.2e-06	1.1e-12	1.3e-28

- Für  $I_{2k,n}$  und  $I_{k,2n}$  wird die Anzahl der Funktionsauswertungen etwa verdoppelt im Vergleich zu  $I_{k,n}$ .

## Numerische Test

$h = (b - a)/n$	$k = 2$	$k = 4$	$k = 8$
4	2.4e-01	1.5e-04	2.9e-13
2	7.4e-03	2.9e-07	2.2e-18
1	2.3e-04	5.6e-10	1.7e-23
0.5	7.2e-06	1.1e-12	1.3e-28

- ▶ Für  $I_{2k,n}$  und  $I_{k,2n}$  wird die Anzahl der Funktionsauswertungen etwa verdoppelt im Vergleich zu  $I_{k,n}$ .
- ▶ In obiger Tabelle kann man sehen, dass man

$$|I - I_{2k,n}| \ll |I - I_{k,2n}|$$

erwarten darf.

## Numerische Test

$h = (b - a)/n$	$k = 2$	$k = 4$	$k = 8$
4	2.4e-01	1.5e-04	2.9e-13
2	7.4e-03	2.9e-07	2.2e-18
1	2.3e-04	5.6e-10	1.7e-23
0.5	7.2e-06	1.1e-12	1.3e-28

- ▶ Für  $I_{2k,n}$  und  $I_{k,2n}$  wird die Anzahl der Funktionsauswertungen etwa verdoppelt im Vergleich zu  $I_{k,n}$ .
- ▶ In obiger Tabelle kann man sehen, dass man

$$|I - I_{2k,n}| \ll |I - I_{k,2n}|$$

erwarten darf.

- ▶ In der Praxis wird daher bei der Gauß-Quadratur  $n$  in der Regel klein gewählt, oft sogar  $n = 1$ .

## Beispiel 10.11

Gauß-Quadratur von

$$I = \int_0^{\pi/2} (x \cos x + e^x) dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

mit  $[c, d] = [0, \frac{\pi}{2}]$  (d.h.  $n = 1$ ).

$m$	$I_m$	$ I_m - I $
1	4.3690643196	1.22e-03
2	4.3813023502	2.86e-05
3	4.3812734352	2.73e-07
4	4.3812737083	5.18e-10



## Beispiel 10.11

Gauß-Quadratur von

$$I = \int_0^{\pi/2} (x \cos x + e^x) dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

mit  $[c, d] = [0, \frac{\pi}{2}]$  (d.h.  $n = 1$ ).

$m$	$I_m$	$ I_m - I $
1	4.3690643196	1.22e-03
2	4.3813023502	2.86e-05
3	4.3812734352	2.73e-07
4	4.3812737083	5.18e-10

Die Genauigkeit der Gauß-Quadratur mit 5 Funktionswerten ( $m = 4$ ) ist besser als die der Simpson-Regel angewandt auf  $n = 32$  Teilintervalle (vgl. Beispiel 10.7), wobei insgesamt 65 Funktionwerte benötigt werden.

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Zu berechnen sei das Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Die summierte Trapezformel  $T(h)$  liefert Approximation der Ordnung  $h^2$ .

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Zu berechnen sei das Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Die summierte Trapezformel  $T(h)$  liefert Approximation der Ordnung  $h^2$ .

**Ziel:** Numerische Approximation an  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = I$  mittels der Werte  $T(h), T(h/2), T(h/4), \dots$  verbessern: **Extrapolation**

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Zu berechnen sei das Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Die summierte Trapezformel  $T(h)$  liefert Approximation der Ordnung  $h^2$ .

**Ziel:** Numerische Approximation an  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = I$  mittels der Werte  $T(h), T(h/2), T(h/4), \dots$  verbessern: **Extrapolation**

**Grundlage:** Asymptotische Entwicklung des Diskretisierungsfehlers:

$$T(h) - I = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots + c_p R(h),$$

mit  $R(h) = \mathcal{O}(h^{2p+2})$ . Annahme:  $f \in C^{2p+2}([a, b])$ .

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Hieraus erhält man

$$T\left(\frac{1}{2}h\right) - I = c_1 \frac{1}{4}h^2 + \hat{c}_2 h^4 + \dots + \hat{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

mit  $\hat{c}_j := c_j \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}$ ,  $j = 2, \dots, p$ , also

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Hieraus erhält man

$$T\left(\frac{1}{2}h\right) - I = c_1 \frac{1}{4}h^2 + \hat{c}_2 h^4 + \cdots + \hat{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

mit  $\hat{c}_j := c_j \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}$ ,  $j = 2, \dots, p$ , also

$$\left[\frac{4}{3}T\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{3}T(h)\right] - I = \tilde{c}_1 h^4 + \cdots + \tilde{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

mit  $\tilde{c}_j := \frac{4}{3}\hat{c}_{j+1} - \frac{1}{3}c_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, p-1$ .

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Hieraus erhält man

$$T\left(\frac{1}{2}h\right) - I = c_1 \frac{1}{4}h^2 + \hat{c}_2 h^4 + \cdots + \hat{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

mit  $\hat{c}_j := c_j \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}$ ,  $j = 2, \dots, p$ , also

$$\left[\frac{4}{3}T\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{3}T(h)\right] - I = \tilde{c}_1 h^4 + \cdots + \tilde{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

mit  $\tilde{c}_j := \frac{4}{3}\hat{c}_{j+1} - \frac{1}{3}c_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, p-1$ .

Treiben wir diese Idee nun systematisch weiter.

Setzen dazu

$$T_1(h) = \frac{4}{3}T\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{3}T(h).$$

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Es gilt

$$T_1(h) - I = \tilde{c}_1 h^4 + \tilde{c}_2 h^6 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

und damit

$$T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - I = \tilde{c}_1 \frac{1}{16} h^4 + \tilde{c}_2 \frac{1}{64} h^6 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$



# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Es gilt

$$T_1(h) - I = \tilde{c}_1 h^4 + \tilde{c}_2 h^6 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

und damit

$$T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - I = \tilde{c}_1 \frac{1}{16} h^4 + \tilde{c}_2 \frac{1}{64} h^6 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{16}{15} \left( T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - I \right) - \frac{1}{15} \left( T_1(h) - I \right) \\ &= \frac{16 T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - T_1(h)}{15} - I \\ &= d_1 h^6 + d_2 h^8 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}). \end{aligned}$$

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Man erkennt, dass die Entwicklung des Fehlers der Quadraturformel

$$T_2(h) := \frac{16}{15}T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{15}T_1(h)$$

mit einem Glied der Ordnung  $h^6$  beginnt.

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Man erkennt, dass die Entwicklung des Fehlers der Quadraturformel

$$T_2(h) := \frac{16}{15}T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{15}T_1(h)$$

mit einem Glied der Ordnung  $h^6$  beginnt.

Mit dieser Idee lassen sich weitere Approximationen der Ordnung  $h^8, h^{10}, \dots$  finden, vorausgesetzt  $f$  ist glatt genug.

# Extrapolation und Romberg-Quadratur

Man erkennt, dass die Entwicklung des Fehlers der Quadraturformel

$$T_2(h) := \frac{16}{15}T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{15}T_1(h)$$

mit einem Glied der Ordnung  $h^6$  beginnt.

Mit dieser Idee lassen sich weitere Approximationen der Ordnung  $h^8, h^{10}, \dots$  finden, vorausgesetzt  $f$  ist glatt genug.

**Wichtig:** Es ist **nicht** nötig die Werte der  $c_i$  der Entwicklung

$$T(h) - I = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots + c_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2})$$

zu kennen.

## Beispiel 10.14

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

und  $T(h)$  die zugehörige Trapezregel.

## Beispiel 10.14

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

und  $T(h)$  die zugehörige Trapezregel.

Die Extrapolation angewandt auf die Trapezregel liefert:

$n$	$T(h)$	$T_1(h)$ $= \frac{4}{3}T(h) - \frac{1}{3}T(2h)$	$ T_1(h) - I $
4	4.39692773		
8	4.38523920	4.38134302	6.93e-05
16	4.38226833	4.38127803	4.33e-06
32	4.38152257	4.38127398	2.70e-07

## Beispiel 10.14

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

und  $T(h)$  die zugehörige Trapezregel.

Die Extrapolation angewandt auf die Trapezregel liefert:

$n$	$T(h)$	$T_1(h)$ $= \frac{4}{3}T(h) - \frac{1}{3}T(2h)$	$ T_1(h) - I $
4	4.39692773		
8	4.38523920	4.38134302	6.93e-05
16	4.38226833	4.38127803	4.33e-06
32	4.38152257	4.38127398	2.70e-07

Erinnerung:  $|T(h) - I| = 2.49e - 04$  für  $n = 32$  (Beispiel 10.2).

# Unterliegendes Prinzip

Sei

$$g(y) := I + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_p y^p + R(y^{\frac{1}{2}}),$$

also  $g(h^2) = T(h)$  für  $h = \frac{b-a}{n}$ .



# Unterliegendes Prinzip

Sei

$$g(y) := I + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_p y^p + R(y^{\frac{1}{2}}),$$

also  $g(h^2) = T(h)$  für  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Den Wert  $g(0) = I$  kann man via [Polynominterpolation](#) annähern.

Stützstellen: Für ein festes  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $y_i := (2^{-i}h)^2$ ,  $i = 0, 1, \dots$

## Lineares Interpolationspolynom

$$P(g | h^2, (\frac{1}{2}h)^2)(y) = T(h) + \frac{T(\frac{1}{2}h) - T(h)}{\frac{1}{4}h^2 - h^2}(y - h^2)$$

# Unterliegendes Prinzip

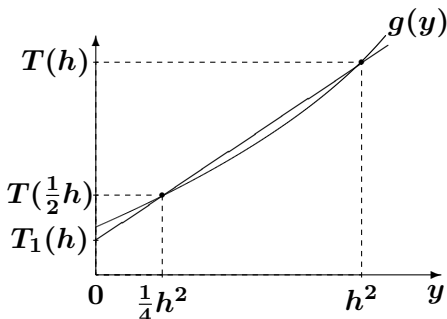
Da man  $I = g(0)$  annähern will, **extrapoliert** man an der Stelle  $y = 0$ :

$$P(g | h^2, (\frac{1}{2}h)^2)(0) = T(h) + \frac{4}{3}(T(\frac{1}{2}h) - T(h)) = T_1(h)$$

# Unterliegendes Prinzip

Da man  $I = g(0)$  annähern will, **extrapoliert** man an der Stelle  $y = 0$ :

$$P(g | h^2, (\frac{1}{2}h)^2)(0) = T(h) + \frac{4}{3}(T(\frac{1}{2}h) - T(h)) = T_1(h)$$



# Unterliegendes Prinzip

Die Näherung  $T_2(h)$  lässt sich wie  $T_1(h)$  ebenfalls über [Extrapolation](#) erklären:

Quadratisches Interpolationspolynom

$$P(g \mid h^2, (\frac{1}{2}h)^2, (\frac{1}{4}h)^2)(0) = T_2(h)$$

# Unterliegendes Prinzip

Die Näherung  $T_2(h)$  lässt sich wie  $T_1(h)$  ebenfalls über [Extrapolation](#) erklären:

## Quadratisches Interpolationspolynom

$$P(g \mid h^2, (\frac{1}{2}h)^2, (\frac{1}{4}h)^2)(0) = T_2(h)$$

Auswertung an der Stelle  $y = 0$  des quadratischen Interpolationspolynoms der Funktion  $y \rightarrow g(y)$  an den Stützstellen  $h^2$ ,  $(\frac{1}{2}h)^2$ ,  $(\frac{1}{4}h)^2$ .

# Allgemeine Vorgehensweise

Sei

$$T_{i,0} := T(2^{-i} h), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei  $h$  eine feste Anfangsschrittweite ist.

Es soll das Interpolationspolynom  $P(g | h^2, \dots, (2^{-k}h)^2)$  vom Grad  $k$  an der Stelle  $y = 0$  ausgewertet werden.

# Allgemeine Vorgehensweise

Sei

$$T_{i,0} := T(2^{-i} h), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei  $h$  eine feste Anfangsschrittweite ist.

Es soll das Interpolationspolynom  $P(g | h^2, \dots, (2^{-k}h)^2)$  vom Grad  $k$  an der Stelle  $y = 0$  ausgewertet werden.

Wir verwenden das Neville-Aitken-Schema zur Bestimmung von

$$P(g | h^2, \dots, (2^{-k}h)^2)(0) =: T_{k,k}$$

## Neville-Aitken-Auswertung

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}, \quad 1 \leq j \leq i \leq p.$$

# Romberg-Schema

Entsprechend dem Neville-Aitken-Schema ergibt sich das

## Romberg-Schema

$$T(h) = T_{0,0}$$

$$T\left(\frac{1}{2}h\right) = T_{1,0}$$

$$T\left(\frac{1}{4}h\right) = T_{2,0}$$

$$T\left(\frac{1}{8}h\right) = T_{3,0}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccc}
 T_{i-1,j-1} & \searrow & \frac{-1}{4^j-1} \\
 & & \\
 T_{i,j-1} & \xrightarrow{\frac{4^j}{4^j-1}} & T_{i,j}
 \end{array}$$



# Romberg-Schema

Entsprechend dem Neville-Aitken-Schema ergibt sich das

## Romberg-Schema

$$\begin{array}{rcl}
 T(h) & = & T_{0,0} \\
 T(\frac{1}{2}h) & = & T_{1,0} \quad \searrow \\
 & & \rightarrow T_{1,1} \\
 T(\frac{1}{4}h) & = & T_{2,0} \\
 T(\frac{1}{8}h) & = & T_{3,0} \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 T_{0,0} & & \searrow \frac{-1}{4^1-1} \\
 T_{1,0} & \rightarrow & T_{1,1} \\
 & & \frac{4^1}{4^1-1}
 \end{array}$$

# Romberg-Schema

Entsprechend dem Neville-Aitken-Schema ergibt sich das

## Romberg-Schema

$$\begin{array}{rccccccc}
 & & & & & & & T_{1,1} & & \searrow & \frac{-1}{4^2-1} \\
 T(h) & = & T_{0,0} & & & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & T_{2,1} & \rightarrow & & T_{2,2} \\
 T(\frac{1}{2}h) & = & T_{1,0} & \rightarrow & T_{1,1} & & & & & \frac{4^2}{4^2-1} & \\
 & & & \searrow & & & & & & & \\
 T(\frac{1}{4}h) & = & T_{2,0} & \rightarrow & T_{2,1} & \searrow & & T_{2,2} & & & \\
 & & & \searrow & & & & & & & \\
 T(\frac{1}{8}h) & = & T_{3,0} & \rightarrow & T_{3,1} & & & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & 
 \end{array}$$

# Romberg-Schema

Entsprechend dem Neville-Aitken-Schema ergibt sich das

## Romberg-Schema

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & T_{2,2} & \searrow \frac{-1}{4^3-1} \\
 T(h) & = & T_{0,0} & & & T_{3,2} & \rightarrow T_{3,3} \\
 & & & \searrow & & & \frac{4^3}{4^3-1} \\
 T(\frac{1}{2}h) & = & T_{1,0} & \rightarrow & T_{1,1} & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & \\
 T(\frac{1}{4}h) & = & T_{2,0} & \rightarrow & T_{2,1} & \rightarrow & T_{2,2} \\
 & & & \searrow & & \searrow & \\
 T(\frac{1}{8}h) & = & T_{3,0} & \rightarrow & T_{3,1} & \rightarrow & T_{3,2} & \rightarrow & T_{3,3} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

## Beispiel 10.15

Sei  $I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$ , wie in Beispiel 10.2.

$T_{i,0} := T(2^{-i}h)$ , wobei  $T(\cdot)$  die summierte Trapezregel ist.

Anfangsschrittweite  $h = \frac{1}{4} \frac{\pi}{2}$ .

Romberg-Schema:

$i$	$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$
0	4.396927734684			
1	4.385239200472	4.381343022401		
2	4.382268326301	4.381278034910	4.381273702411	
3	4.381522565173	4.381273978130	4.381273706768	4.381273707762

## Beispiel 10.15

Sei  $I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$ , wie in Beispiel 10.2.

$T_{i,0} := T(2^{-i}h)$ , wobei  $T(\cdot)$  die summierte Trapezregel ist.

Anfangsschrittweite  $h = \frac{1}{4} \frac{\pi}{2}$ .

Romberg-Schema:

$i$	$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$
0	4.396927734684			
1	4.385239200472	4.381343022401		
2	4.382268326301	4.381278034910	4.381273702411	
3	4.381522565173	4.381273978130	4.381273706768	4.381273707762

Fehler:

$i$	$ I - T_{i,j} $			
0	1.57e-02			
1	3.97e-03	6.93e-05		
2	9.95e-04	4.33e-06	5.35e-09	
3	2.49e-04	2.70e-07	8.22e-11	1.42e-12

Fehlerverhalten:  $|I - T_{i,j}| \sim (2^{-i}h)^{2j+2}$

# Integraltransformation

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Sei

$$I_1 = [a, b], \quad I_2 = [c, d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \rightarrow I_2$$

eine stetig differenzierbare **bijektive** Abbildung.

Es gilt die **Transformationsformel**

$$\int_{I_1} f(\psi(x)) |\psi'(x)| dx = \int_{I_2} f(y) dy$$

# Integraltransformation

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Sei

$$I_1 = [a, b], \quad I_2 = [c, d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \rightarrow I_2$$

eine stetig differenzierbare **bijektive** Abbildung.

Es gilt die **Transformationsformel**

$$\int_{I_1} f(\psi(x)) |\psi'(x)| dx = \int_{I_2} f(y) dy$$

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, falls  $\psi$  **affin** ist, d.h.

$$\hat{\psi} : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \hat{\psi}(x) = \frac{x-a}{b-a} d + \frac{b-x}{b-a} c$$

## Integraltransformation

Wenn

$$Q_m(g; I_1) = (b - a) \sum_{j=0}^m c_j g(x_j)$$

eine Formel zur Annäherung von

$$\int_a^b g(x) dx$$

ist, ergibt sich die entsprechende Formel für das Intervall  $I_2 = [c, d]$ :

$$\begin{aligned} \int_{I_2} f(y) dy &= \int_a^b f(\hat{\psi}(x)) |\hat{\psi}'(x)| dx \\ &= \frac{d - c}{b - a} \int_a^b f(\hat{\psi}(x)) dx \\ &\approx (d - c) \sum_{j=0}^m c_j f(\hat{\psi}(x_j)) \end{aligned}$$



## Transformation von Quadraturformeln

Also insgesamt:

$$Q_m(g; I_1) = (b - a) \sum_{j=0}^m c_j g(x_j)$$

$$Q_m(f; I_2) = (d - c) \sum_{j=0}^m \hat{c}_j f(\hat{x}_j), \quad \text{mit}$$

$$\hat{c}_j = c_j, \quad \hat{x}_j = \hat{\psi}(x_j) = \frac{x_j - a}{b - a}d + \frac{b - x_j}{b - a}c$$

## Beispiel 10.17

Gauß-Quadraturformeln werden oft für das Intervall  $[-1, 1]$  spezifiziert, z.B.

$$I_{[-1,1]}(g) = \int_{-1}^1 g(x) dx \approx 2 \left[ \frac{1}{2}g\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \right]$$

aus Beispiel 10.10.

## Beispiel 10.17

Gauß-Quadraturformeln werden oft für das Intervall  $[-1, 1]$  spezifiziert, z.B.

$$I_{[-1,1]}(g) = \int_{-1}^1 g(x) dx \approx 2 \left[ \frac{1}{2}g\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \right]$$

aus Beispiel 10.10.

Die entsprechende Formel für  $[c, d]$  und  $h := d - c$  lautet:

$$I_{[c,d]}(f) \approx \frac{h}{2} \left[ f\left(c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \right]$$

# Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Wir betrachten nun die Transformation eines **zweidimensionalen** Integrals

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy, \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

# Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Wir betrachten nun die Transformation eines **zweidimensionalen** Integrals

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy, \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei

$$B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\psi : B_1 \rightarrow B_2$$

eine stetig differenzierbare **bijektive** Abbildung mit Jacobi-Matrix

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

# Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Es gilt folgende **Transformationsformel**:

## Satz 10.18

Falls  $\det J(x, y) \neq 0$  für alle  $(x, y) \in B_1$ , so gilt

$$\iint_{B_1} f(\psi(x, y)) |\det J(x, y)| dx dy = \iint_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}$$

# Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Es gilt folgende **Transformationsformel**:

## Satz 10.18

Falls  $\det J(x, y) \neq 0$  für alle  $(x, y) \in B_1$ , so gilt

$$\iint_{B_1} f(\psi(x, y)) |\det J(x, y)| dx dy = \iint_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}$$

Für den Spezialfall,  $\psi$  **affin**, ergibt sich

$$\psi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^2,$$

$$|\det A| \iint_{B_1} f\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\right) dx dy = \iint_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}$$

# Zweidimensionales Integral

Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann man, wie im eindimensionalen Fall, **eine Quadraturformel für einen Standardbereich** (z.B. Einheitsquadrat, Einheitsdreieck) in eine Formel für einen **affin-äquivalenten Bereich** überführen.



# Zweidimensionales Integral

Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann man, wie im eindimensionalen Fall, **eine Quadraturformel für einen Standardbereich** (z.B. Einheitsquadrat, Einheitsdreieck) in eine Formel für einen **affin-äquivalenten Bereich überführen**.

Wichtiger **Unterschied** zwischen ein- und mehrdimensionaler Integration:

Zwei Intervalle  $[a, b]$  und  $[c, d]$  lassen sich stets durch **affine** Transformationen aufeinander abbilden.

Hingegen ist es meistens **nicht** möglich, einfache Gebiete in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , durch eine **affine** Transformation ineinander zu überführen.

# Integration über dem Einheitsquadrat

Gesucht ist eine numerische Näherung für

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy.$$

# Integration über dem Einheitsquadrat

Gesucht ist eine numerische Näherung für

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy.$$

Sei

$$F(y) := \int_0^1 f(x, y) \, dx,$$

und

$$Q_m(g) = \sum_{j=0}^m c_j g(x_j) \approx \int_0^1 g(x) \, dx$$

eine Quadraturformel für dieses [eindimensionale](#) Integral.

# Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 F(y) dy$$

# Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^1 F(y) dy \\ &\approx \sum_{j=0}^m c_j F(x_j)\end{aligned}$$

# Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 F(y) \, dy \\ &\approx \sum_{j=0}^m c_j F(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^m c_j \int_0^1 f(x, x_j) \, dx\end{aligned}$$

# Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 F(y) \, dy \\ &\approx \sum_{j=0}^m c_j F(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^m c_j \int_0^1 f(x, x_j) \, dx \\ &\approx \sum_{j=0}^m c_j \sum_{i=0}^m c_i f(x_i, x_j)\end{aligned}$$

# Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 F(y) \, dy \\ &\approx \sum_{j=0}^m c_j F(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^m c_j \int_0^1 f(x, x_j) \, dx \\ &\approx \sum_{j=0}^m c_j \sum_{i=0}^m c_i f(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i,j=0}^m c_i c_j f(x_i, x_j) =: Q_m^{(2)}(f).\end{aligned}$$



# Integration über dem Einheitsdreieck

Für **Dreiecke** ist es zweckmäßig, von den Monomen

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \quad \text{usw.}$$

auszugehen und die Frage nach solchen Quadraturformeln zu stellen, die alle Monome der Form  $x^{k_1}y^{k_2}$ ,  $0 \leq k_1 + k_2 \leq M$  exakt integrieren.

Einige typische **Beispiele**:

- (i)  $Q(f) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
- (ii)  $Q(f) = \frac{1}{6}[f(0,0) + f(1,0) + f(0,1)]$

## Integration über dem Einheitsdreieck

$$(iii) \quad Q(f) = \frac{1}{6} \left[ f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$(iv) \quad Q(f) = \frac{1}{6} \left[ f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right].$$

Die Monome  $1, x, y$  werden durch die Formeln in (i), (ii) **exakt integriert**.

Die Monome  $1, x, y, xy, x^2, y^2$  werden durch die Formeln in (iii), (iv) **exakt integriert**.