

Kapitel 11

Buch Dahmen-Reusken

RWTH Aachen University

2022

Einleitung

Skalare gewöhnliche Differentialgleichung

Gesucht wird eine Funktion $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ einer (Zeit-)Variablen t , die der Gleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) , \quad t \in [t_0, T] ,$$

und der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y^0$$

genügen soll.

Einleitung

Skalare gewöhnliche Differentialgleichung

Gesucht wird eine Funktion $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ einer (Zeit-)Variablen t , die der Gleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) , \quad t \in [t_0, T] ,$$

und der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y^0$$

genügen soll.

Bispiel 11.1

Gesucht wird eine Funktion $y(t)$, $t \geq 0$, für die

$$y' = 2ty^2 \quad (t \geq 0) \quad \text{und} \quad y(0) = 1$$

gilt. Lösung: $y(t) = (1 - t^2)^{-1}$, $t \in [0, 1)$.

Allgemeine Problemstellung

System n gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_1(t) &= f_1(t, \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}'_n(t) &= f_n(t, \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)), \end{aligned}$$

für $t \in [t_0, T]$. Anfangsbedingung: $\mathbf{y}_i(t_0) = \mathbf{y}_i^0$, $i = 1, \dots, n$.

Notation:

$$\mathbf{y}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \end{pmatrix}, f(t, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)) \end{pmatrix}, \mathbf{y}^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^0 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^0 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Problemstellung

Anfangswertproblem

Gesucht $\mathbf{y} : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) , & t \in [t_0, T] , \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}^0 \end{aligned}$$

Allgemeine Problemstellung

Anfangswertproblem

Gesucht $\mathbf{y} : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) , \quad t \in [t_0, T] , \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}^0 \end{aligned}$$

Beispiel 11.2

Gesucht $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), t \geq 0$, für die

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}'_1 \\ \mathbf{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \\ 2\mathbf{y}_1 - 2\mathbf{y}_2 + 3 \sin t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(0) \\ \mathbf{y}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Lösung:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix} .$$

Beispiel 11.3

Räuber-Beute-Modell von Lottka und Volterra.

Es seien $y_1(t)$ die Beute-Population und $y_2(t)$ die Räuber-Population zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

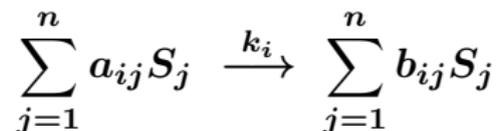
Die **Lottka-Volterra-Gleichung** ist

$$\begin{aligned}y_1' &= c_1 y_1 (1 - d_1 y_2), & y_1(0) &= y_1^0, \\y_2' &= c_2 y_2 (d_2 y_1 - 1), & y_2(0) &= y_2^0,\end{aligned}$$

mit positiven Konstanten c_1, c_2, d_1, d_2 .

Beispiel 11.4

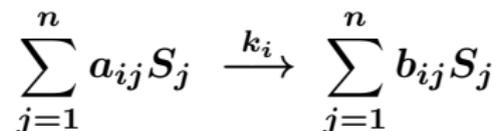
Chemische Reaktionsprozesse. Seien S_1, \dots, S_n chemische Stoffe, die miteinander reagieren. Die i -te Reaktion wird durch



beschrieben, wobei a_{ij}, b_{ij} die stöchiometrischen Koeffizienten sind und k_i die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante ist.

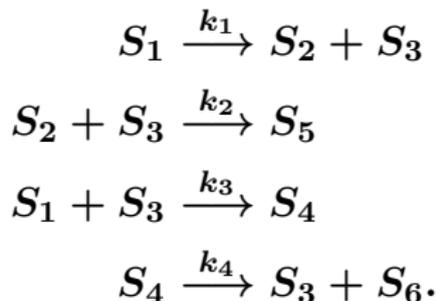
Beispiel 11.4

Chemische Reaktionsprozesse. Seien S_1, \dots, S_n chemische Stoffe, die miteinander reagieren. Die i -te Reaktion wird durch



beschrieben, wobei a_{ij}, b_{ij} die stöchiometrischen Koeffizienten sind und k_i die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante ist.

Beispiel: **chemische Pyrolyse.** Das Reaktionsschema:



Beispiel 11.4

Das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$y_1' = -k_1 y_1 - k_3 y_1 y_3$$

$$y_2' = k_1 y_1 - k_2 y_2 y_3$$

$$y_3' = k_1 y_1 - k_2 y_2 y_3 - k_3 y_1 y_3 + k_4 y_4$$

$$y_4' = k_3 y_1 y_3 - k_4 y_4$$

$$y_5' = k_2 y_2 y_3$$

$$y_6' = k_4 y_4.$$

Anfangsbedingungen: $y_1(0) = 1.8 \cdot 10^{-3}$, $y_i(0) = 0$ für $i = 2, \dots, 6$.

Die Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten

$$k_1 = 7.9 \cdot 10^{-10}, \quad k_2 = 1.1 \cdot 10^9, \quad k_3 = 1.1 \cdot 10^7, \quad k_4 = 1.1 \cdot 10^3.$$

sind von sehr unterschiedlicher Größenordnung.

Beispiel 11.5

Partielle Differentialgleichung: gesucht $T(x, t)$, $x \in [0, \ell]$, $t > 0$, so dass

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell).$$

mit Anfangswert $T(x, 0) = \Phi(x)$ und

Randwerten $T(0, t) = T(\ell, t) = 0$.

$\kappa > 0$ eine bekannte Konstante.

Beispiel 11.5

Partielle Differentialgleichung: gesucht $T(x, t)$, $x \in [0, \ell]$, $t > 0$, so dass

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell).$$

mit Anfangswert $T(x, 0) = \Phi(x)$ und

Randwerten $T(0, t) = T(\ell, t) = 0$.

$\kappa > 0$ eine bekannte Konstante.

Diskretisierung dieses Problems mit der Linien-Methode.

Approximation

$$\kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\kappa}{h_x^2} (T(x + h_x, t) - 2T(x, t) + T(x - h_x, t)),$$

mit $h_x = \frac{\ell}{n_x}$, und $n_x \in \mathbb{N}$.

Beispiel 11.5

Man sucht für jeden Orts-Gitterpunkt $x_j = jh_x$ Funktionen

$$y_j(t) \approx T(x_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, n_x - 1,$$

die das im Ort diskretisierte Näherungsproblem

$$y_j' = \frac{\kappa}{h_x^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n_x - 1,$$

erfüllen.

Beispiel 11.5

Man sucht für jeden Orts-Gitterpunkt $x_j = jh_x$ Funktionen

$$y_j(t) \approx T(x_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, n_x - 1,$$

die das im Ort diskretisierte Näherungsproblem

$$y_j' = \frac{\kappa}{h_x^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n_x - 1,$$

erfüllen. Wegen $y_0(t) = y_{n_x}(t) = 0$ für $t > 0$, sind lediglich die Funktionen y_j , $1 \leq j \leq n_x - 1$ unbekannt.

Notationen: $\mathbf{y} := (y_1, y_2, \dots, y_{n_x-1})^T$,

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0 := \begin{pmatrix} \Phi(x_1) \\ \vdots \\ \Phi(x_{n_x-1}) \end{pmatrix}$$

Beispiel 11.5

Das sich ergebende Problem:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) = Ay, \quad t > 0, \\ y(0) &= y^0 \end{aligned}$$

mit

$$A = -\frac{\kappa}{h_x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}$$

Skalare Probleme höherer Ordnung

Das mathematische Pendel

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\phi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\phi(t)), \quad t \geq 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = 0,$$

Skalare Probleme höherer Ordnung

Das mathematische Pendel

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\phi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\phi(t)), \quad t \geq 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = 0,$$

Allgemeine skalare Anfangswertaufgabe m -ter Ordnung

Bestimme eine skalare Funktion $y(t)$, so dass

$$y^{(m)} = g(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad t \in [t_0, T],$$

$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = z_{m-1}.$$

Reduktion auf ein System 1. Ordnung

Aufgabe:

$$y^{(m)} = g(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) , \quad t \in [t_0, T] ,$$

$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = z_{m-1}.$$

Reduktion auf ein System 1. Ordnung

Aufgabe:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(m)} &= g(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}) , & t \in [t_0, T] , \\ \mathbf{y}(t_0) &= z_0, \quad \mathbf{y}'(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad \mathbf{y}^{(m-1)}(t_0) = z_{m-1}. \end{aligned}$$

Äquivalentes System von m Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}'_1(t) &= \mathbf{y}_2(t) \\ \mathbf{y}'_2(t) &= \mathbf{y}_3(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}'_{m-1}(t) &= \mathbf{y}_m(t) \\ \mathbf{y}'_m(t) &= g(t, \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_m(t)) \end{aligned} \right\} \text{ für } t \in [t_0, T]$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{y}_1(t_0) = z_0, \quad \dots, \quad \mathbf{y}_m(t_0) = z_{m-1}$$

Beispiel 11.8

Aufgabe:

$$y''' = -2y'' + y' + y^2 - e^t, \quad t \in [0, T],$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Beispiel 11.8

Aufgabe:

$$y''' = -2y'' + y' + y^2 - e^t, \quad t \in [0, T],$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Neue Variablen

$$y_1(t) := y(t), \quad y_2(t) := y'(t), \quad y_3(t) := y''(t).$$

Das äquivalente System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -2y_3 + y_2 + y_1^2 - e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T],$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 0, 0).$$

Satz von Picard-Lindelöf

Satz 11.10

Es seien $T > t_0$, \mathcal{U} eine Umgebung des Anfangsvektors $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^n$, und $f : [t_0, T] \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, für die Folgendes gilt:

- ▶ f ist stetig in (t, \mathbf{y}) auf $[t_0, T] \times \mathcal{U}$.
- ▶ f ist Lipschitz-stetig in \mathbf{y} , D.h., es existiert eine Konstante L , so dass

$$\|f(t, \mathbf{y}) - f(t, \mathbf{z})\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \text{ für alle } t \in [t_0, T], \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{U}$$

(wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige feste Norm auf \mathbb{R}^n ist).

Dann existiert eine eindeutige Lösung \mathbf{y} in einer Umgebung von t_0 (die von T und L abhängt).

Empfindlichkeit bzgl. Störung in Anfangsdaten

Satz 11.12

Die Funktion f sei Lipschitz-stetig in y (bzgl. einer Umgebung \mathcal{U} von $y^0, z^0 \in \mathbb{R}^n$). Es seien $y(t), z(t)$ Lösungen des Anfangswertproblems bezüglich der Anfangsdaten $y^0, z^0 \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt für alle t aus einer Umgebung von t_0 die Abschätzung

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|y^0 - z^0\| .$$

Empfindlichkeit bzgl. Störung in Anfangsdaten

Satz 11.12

Die Funktion f sei Lipschitz-stetig in y (bzgl. einer Umgebung \mathcal{U} von $y^0, z^0 \in \mathbb{R}^n$). Es seien $y(t), z(t)$ Lösungen des Anfangswertproblems bezüglich der Anfangsdaten $y^0, z^0 \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt für alle t aus einer Umgebung von t_0 die Abschätzung

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|y^0 - z^0\|.$$

\Rightarrow : unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf hängt die (lokal) eindeutige Lösung **stetig von den Anfangsbedingungen ab**.

Beispiel 11.13

Die skalaren Probleme ($n = 1$)

$$y' = Ly, \quad y(t_0) = y^0, \quad z' = Lz, \quad z(t_0) = z^0, \quad \text{mit } L > 0.$$

Lösungen für $t \geq t_0$:

$$y(t) = y^0 e^{L|t-t_0|}, \quad z(t) = z^0 e^{L|t-t_0|}.$$

Wegen $f(t, y) - f(t, z) = L(y - z)$ ist die Lipschitzkonstante genau L .

Beispiel 11.13

Die skalaren Probleme ($n = 1$)

$$y' = Ly, \quad y(t_0) = y^0, \quad z' = Lz, \quad z(t_0) = z^0, \quad \text{mit } L > 0.$$

Lösungen für $t \geq t_0$:

$$y(t) = y^0 e^{L|t-t_0|}, \quad z(t) = z^0 e^{L|t-t_0|}.$$

Wegen $f(t, y) - f(t, z) = L(y - z)$ ist die Lipschitzkonstante genau L .

$$\begin{aligned} y(t) - z(t) &= e^{L|t-t_0|} (y^0 - z^0) \\ \frac{|y(t) - z(t)|}{|y(t)|} &= \frac{e^{L|t-t_0|} |y^0 - z^0|}{|y^0| e^{L|t-t_0|}} = \frac{|y^0 - z^0|}{|y^0|} \end{aligned}$$

Beispiel 11.13

Die skalaren Probleme ($n = 1$)

$$y' = Ly, \quad y(t_0) = y^0, \quad z' = Lz, \quad z(t_0) = z^0, \quad \text{mit } L > 0.$$

Lösungen für $t \geq t_0$:

$$y(t) = y^0 e^{L|t-t_0|}, \quad z(t) = z^0 e^{L|t-t_0|}.$$

Wegen $f(t, y) - f(t, z) = L(y - z)$ ist die Lipschitzkonstante genau L .

$$\begin{aligned} y(t) - z(t) &= e^{L|t-t_0|}(y^0 - z^0) \\ \frac{|y(t) - z(t)|}{|y(t)|} &= \frac{e^{L|t-t_0|} |y^0 - z^0|}{|y^0| e^{L|t-t_0|}} = \frac{|y^0 - z^0|}{|y^0|} \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist die relative Kondition für alle Werte von y^0 und L gut, während die absolute Kondition für $L \gg 1$ schlecht ist.

Darstellung als Integralgleichung

Bemerkung 11.14

Die Funktion \mathbf{y} löst die Differentialgleichung $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$, $t \in [t_0, T]$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ genau dann, wenn sie die Integralgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds, \quad t \in [t_0, T],$$

löst.

Beachte: Falls \mathbf{f} eine Vektorfunktion ist, wird bei $\int \mathbf{f} ds$ jede Komponente von \mathbf{f} integriert.

Gronwall-Lemma

Beobachtung:

$$v(t) = C + \int_{t_0}^t u(s)v(s) ds \quad \Longrightarrow \quad v(t) = Ce^{\int_{t_0}^t u(s) ds}$$

Ungleichungs-Analogon:

Gronwall-Lemma 11.15

Für jedes $C \geq 0$ und beliebiges stückweise stetiges $v(t) \geq 0$, $u(t) \geq 0$ für $t \geq t_0$, impliziert

$$v(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)v(s) ds, \quad t \geq t_0,$$

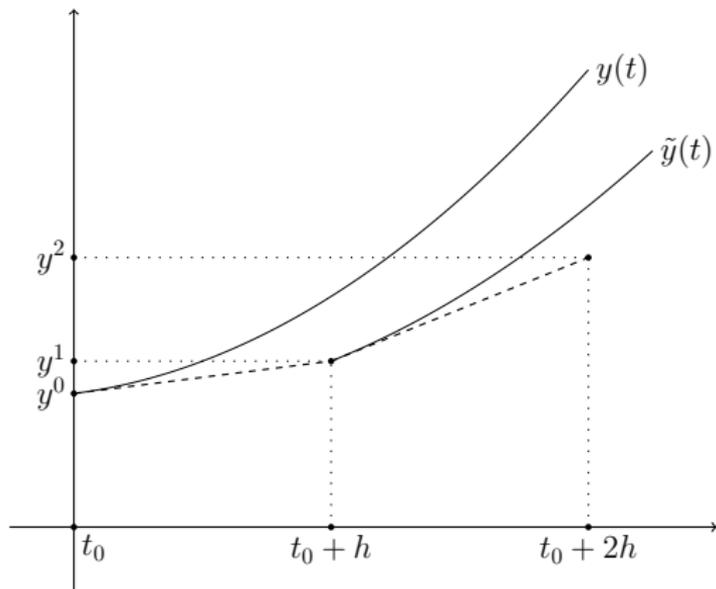
die Ungleichung

$$v(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t u(s) ds}, \quad t \geq t_0.$$

Einfache Einschrittverfahren

Das Euler-Verfahren:

$$y^1 = y^0 + hf(t_0, y^0)$$



Herleitungsprinzip

Sei $(t_j, \mathbf{y}^j) \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

Wir nehmen diese Daten als (künstliche) Anfangsbedingung:

$$\tilde{\mathbf{y}}' = f(t, \tilde{\mathbf{y}}) \quad \text{für } t \in [t_j, T], \quad \tilde{\mathbf{y}}(t_j) = \mathbf{y}^j.$$

Die Lösung $\tilde{\mathbf{y}}$ ist auch Lösung der Integralgleichung

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}^j + \int_{t_j}^t f(s, \tilde{\mathbf{y}}(s)) ds, \quad t \in [t_j, T].$$

Insbesondere gilt für $t = t_{j+1} > t_j$:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t_{j+1}) = \mathbf{y}^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \tilde{\mathbf{y}}(s)) ds.$$

Herleitungsprinzip

Quadratur zur Approximation des Integrals. Z.B. Rechteckregel:

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \tilde{y}(s)) ds \approx y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, y^j) ds =: y^{j+1}$$

Herleitungsprinzip

Quadratur zur Approximation des Integrals. Z.B. Rechteckregel:

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \tilde{y}(s)) ds \approx y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, y^j) ds =: y^{j+1}$$

Oder mit der Mittelpunktsregel

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s) ds \approx hg(t_j + \frac{h}{2})$$

Der Wert

$$g(t_j + \frac{h}{2}) = f(t_j + \frac{h}{2}, \tilde{y}(t_j + \frac{h}{2}))$$

ist nicht bekannt. Diesen Wert kann man aber durch $f(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}})$ mit $y^{j+\frac{1}{2}} := y^j + \frac{h}{2} f(t_j, y^j)$ annähern.

Einfache Einschrittverfahren

Verbessertes Euler-Verfahren

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $j = 0, \dots, n-1$:

$$t_{j+1} = t_j + h$$

$$y^{j+\frac{1}{2}} = y^j + \frac{h}{2} f(t_j, y^j)$$

$$y^{j+1} = y^j + h f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}}\right)$$

Einfache Einschrittverfahren

Verbessertes Euler-Verfahren

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $j = 0, \dots, n-1$:

$$t_{j+1} = t_j + h$$

$$y^{j+\frac{1}{2}} = y^j + \frac{h}{2} f(t_j, y^j)$$

$$y^{j+1} = y^j + h f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}}\right)$$

Trapezmethode (implizit!)

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $j = 0, \dots, n-1$:

$$t_{j+1} = t_j + h$$

$$y^{j+1} = y^j + \frac{h}{2} (f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1}))$$

Beispiel 11.21

$$\begin{aligned}y'(t) &= y(t) - 2 \sin t, \quad t \in [0, 4], \\y(0) &= 1.\end{aligned}$$

Lösung: $y(t) = \sin t + \cos t$

► Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned}y^{j+1} &= y^j + hf(t_j, y^j) \\&= y^j + h(y^j - 2 \sin t_j) = (1 + h)y^j - 2h \sin t_j\end{aligned}$$

► Verbessertes Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned}y^{j+1} &= y^j + hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}}\right) \\&= y^j + h\left(y^{j+\frac{1}{2}} - 2 \sin\left(t_j + \frac{h}{2}\right)\right) \\&= \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2\right)y^j - 2h \sin\left(t_j + \frac{h}{2}\right) - h^2 \sin t_j.\end{aligned}$$

Beispiel 11.21

▶ Trapezmethode:

$$\begin{aligned}y^{j+1} &= y^j + \frac{h}{2}(f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})) \\ &= \left(1 + \frac{h}{2}\right)y^j + \frac{h}{2}y^{j+1} - h(\sin t_j + \sin t_{j+1}).\end{aligned}$$

In diesem einfachen Fall kann man die **implizite** Gleichung für y^{j+1} in eine **explizite** umschreiben:

$$y^{j+1} = \frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}y^j - \frac{h}{1 - \frac{h}{2}}(\sin t_j + \sin t_{j+1}).$$

Beispiel 11.21

Euler-Verfahren

h	$ y^{1/h} - y(1) $	$ y^{2/h} - y(2) $	$ y^{4/h} - y(4) $
2^{-4}	0.0647	0.2271	1.5101
2^{-5}	0.0332	0.1176	0.8063
2^{-6}	0.0168	0.0599	0.4170
2^{-7}	0.0085	0.0302	0.2121

Verbessertes Euler-Verfahren

h	$ y^{1/h} - y(1) $	$ y^{2/h} - y(2) $	$ y^{4/h} - y(4) $
2^{-4}	0.001155	0.003824	0.025969
2^{-5}	0.000294	0.000973	0.006606
2^{-6}	0.000074	0.000245	0.001665
2^{-7}	0.000019	0.000062	0.000418

Trapezmethode

h	$ y^{1/h} - y(1) $	$ y^{2/h} - y(2) $	$ y^{4/h} - y(4) $
2^{-4}	0.0002739	0.0002956	0.0002493
2^{-5}	0.0000685	0.0000740	0.0000618
2^{-6}	0.0000171	0.0000185	0.0000154
2^{-7}	0.0000043	0.0000046	0.0000039

Beispiel 11.22

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 - y_2 \\ 2y_1 - 2y_2 + 3 \sin t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0), \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

Beispiel 11.22

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 - y_2 \\ 2y_1 - 2y_2 + 3 \sin t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0), \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

Verbessertes Euler-Verfahren

$$\begin{pmatrix} y_1^{j+\frac{1}{2}} \\ y_2^{j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1^j - y_2^j \\ 2y_1^j - 2y_2^j + 3 \sin(jh) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1^{j+1} \\ y_2^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1^{j+\frac{1}{2}} - y_2^{j+\frac{1}{2}} \\ 2y_1^{j+\frac{1}{2}} - 2y_2^{j+\frac{1}{2}} + 3 \sin((j + \frac{1}{2})h) \end{pmatrix}$$

Beispiel 11.22

Fehler:

$$\|y^n - y(T)\|_\infty := \max\{|y_1^n - y_1(T)|, |y_2^n - y_2(T)|\}$$

Resultate:

h	$\ y^{1/h} - y(1)\ _\infty$	$\ y^{2/h} - y(2)\ _\infty$	$\ y^{4/h} - y(4)\ _\infty$
2^{-4}	0.000749	0.002048	0.001140
2^{-5}	0.000188	0.000507	0.000289
2^{-6}	0.000047	0.000126	0.000073
2^{-7}	0.000012	0.000031	0.000018

Allgemeine Einschrittverfahren

Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{j+1} &= \Psi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h_j) = \mathbf{y}^j + h_j \left(\frac{\Psi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h_j) - \mathbf{y}^j}{h_j} \right) \\ &=: \mathbf{y}^j + h_j \Phi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h_j). \end{aligned}$$

Allgemeine Einschrittverfahren

Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{j+1} &= \Psi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h_j) = \mathbf{y}^j + h_j \left(\frac{\Psi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h_j) - \mathbf{y}^j}{h_j} \right) \\ &=: \mathbf{y}^j + h_j \Phi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h_j). \end{aligned}$$

Beachte: Bei **impliziten** Verfahren wird Φ_f nicht durch eine explizite Funktion beschrieben, sondern steht für eine **Vorschrift**, deren Ausführung die Lösung von Gleichungssystemen verlangt.

Globaler Fehler

Der **globale** Diskretisierungsfehler:

$$e_h(t_j) := y(t_j) - y_h(t_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

$$\|e_h\|_\infty := \max_{j=0, \dots, n} \|e_h(t_j)\|$$

Globaler Fehler

Der **globale** Diskretisierungsfehler:

$$e_h(t_j) := y(t_j) - y_h(t_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

$$\|e_h\|_\infty := \max_{j=0, \dots, n} \|e_h(t_j)\|$$

Konvergenzordnung

Ein Verfahren heißt **konvergent von der Ordnung** $p \in \mathbb{N}$, falls

$$\|e_h\|_\infty = \mathcal{O}(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

gilt.

Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz

Lokaler Abbruchfehler

Es sei $\mathbf{y}(t; t_a, \mathbf{y}^a)$ die Lösung des Problems

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad t \in [t_a, t_a + h], \quad \mathbf{y}(t_a) = \mathbf{y}^a,$$

und

$$\mathbf{y}_h(t_a + h; t_a, \mathbf{y}^a) = \Psi_f(t_a, \mathbf{y}^a, h) = \mathbf{y}^a + h\Phi_f(t_a, \mathbf{y}^a, h)$$

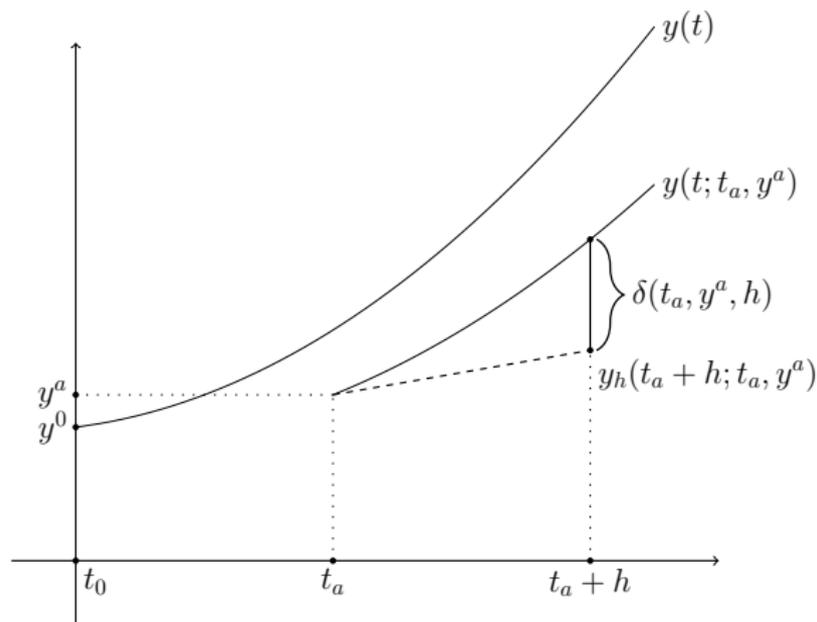
das Resultat, das das ESV nach einem Schritt zum Startwert (t_a, \mathbf{y}^a) liefert. Dann heißt die Differenz der Werte

$$\delta(t_a, \mathbf{y}^a, h) = \mathbf{y}(t_a + h; t_a, \mathbf{y}^a) - \mathbf{y}_h(t_a + h; t_a, \mathbf{y}^a)$$

der **lokale Abbruchfehler** (im Intervall $[t_a, t_a + h]$).

Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz

Lokaler Abbruchfehler $\delta(t_a, y^a, h)$ im skalaren Fall:



Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz

Wichtige Spezialfälle:

► $(t_a, y^a) = (t_j, y(t_j))$. Also

$$\begin{aligned}\delta_{j,h} &:= \delta(t_j, y(t_j), h) = y(t_{j+1}; t_j, y(t_j)) - y_h((t_{j+1}; t_j, y(t_j))) \\ &= y(t_{j+1}) - y(t_j) - h\Phi_f(t_j, y(t_j), h)\end{aligned}$$

Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz

Wichtige Spezialfälle:

- ▶ $(t_a, \mathbf{y}^a) = (t_j, \mathbf{y}(t_j))$. Also

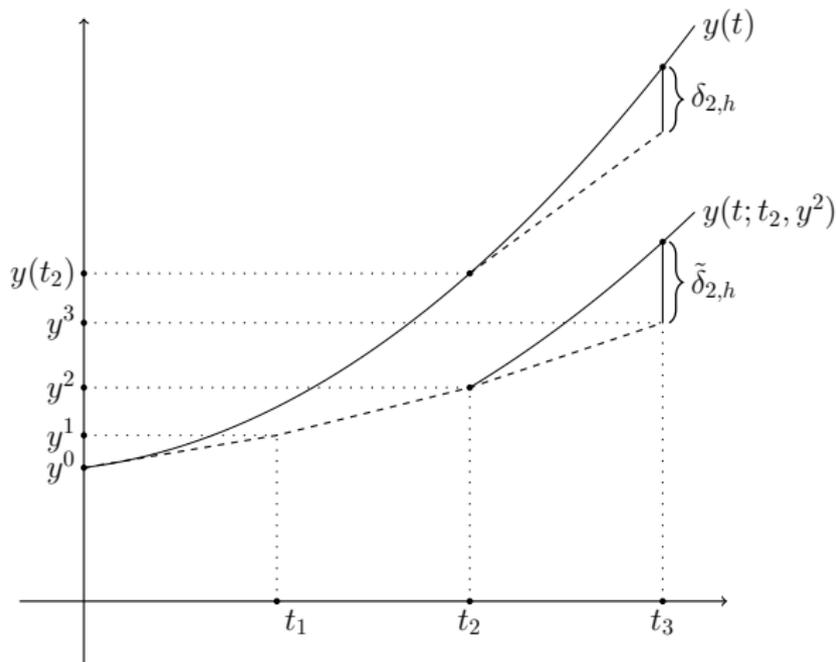
$$\begin{aligned}\delta_{j,h} &:= \delta(t_j, \mathbf{y}(t_j), h) = \mathbf{y}(t_{j+1}; t_j, \mathbf{y}(t_j)) - \mathbf{y}_h((t_{j+1}; t_j, \mathbf{y}(t_j))) \\ &= \mathbf{y}(t_{j+1}) - \mathbf{y}(t_j) - h\Phi_f(t_j, \mathbf{y}(t_j), h)\end{aligned}$$

- ▶ $(t_a, \mathbf{y}^a) = (t_j, \mathbf{y}^j)$. Also

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_{j,h} &:= \delta(t_j, \mathbf{y}^j, h) := \mathbf{y}(t_{j+1}; t_j, \mathbf{y}^j) - \mathbf{y}^{j+1} \\ &= \mathbf{y}(t_{j+1}; t_j, \mathbf{y}^j) - \mathbf{y}^j - h\Phi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h)\end{aligned}$$

Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz

Lokale Abbruchfehler $\delta_{j,h}$, $\tilde{\delta}_{j,h}$, im skalaren Fall:



Konsistenzfehler

Konsistenzfehler

$$\tau(t_a, y^a, h) := \frac{\delta(t_a, y^a, h)}{h} = \frac{y(t_a + h; t_a, y^a) - y_h(t_a + h; t_a, y^a)}{h}$$

Konsistenzfehler

Konsistenzfehler

$$\tau(t_a, \mathbf{y}^a, h) := \frac{\delta(t_a, \mathbf{y}^a, h)}{h} = \frac{\mathbf{y}(t_a + h; t_a, \mathbf{y}^a) - \mathbf{y}_h(t_a + h; t_a, \mathbf{y}^a)}{h}$$

Konsistenzordnung

Ein ESV heißt konsistent von der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ (oder hat Konsistenzordnung p), falls

$$\|\tau(t_a, \mathbf{y}^a, h)\| \leq Ch^p = \mathcal{O}(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

für alle Punkte (t_a, \mathbf{y}^a) in einer Umgebung des Lösungsgraphen $\{(t, \mathbf{y}(t)) \mid t \in [t_0, T]\}$ gilt. Die Konstante C in dem \mathcal{O} -Term soll dabei unabhängig von (t_a, \mathbf{y}^a) (aus dieser Umgebung) sein.

Bestimmung der Konsistenzordnung

Für **explizite Einschrittverfahren** gibt es eine allgemeine Strategie die man über eine Taylorentwicklung herleiten kann.

Wir betrachten ein explizites Einschrittverfahren

$$\mathbf{y}^{j+1} = \mathbf{y}^j + h_j \Phi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h_j)$$

Sei (t_a, \mathbf{y}^a) aus einer Umgebung des Lösungsgraphen und $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t; t_a, \mathbf{y}^a)$ die exakte Lösung zu diesen Anfangsdaten.

Bestimmung der Konsistenzordnung

Für **explizite Einschrittverfahren** gibt es eine allgemeine Strategie die man über eine Taylorentwicklung herleiten kann.

Wir betrachten ein explizites Einschrittverfahren

$$\mathbf{y}^{j+1} = \mathbf{y}^j + h_j \Phi_f(t_j, \mathbf{y}^j, h_j)$$

Sei (t_a, \mathbf{y}^a) aus einer Umgebung des Lösungsgraphen und $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t; t_a, \mathbf{y}^a)$ die exakte Lösung zu diesen Anfangsdaten.

Das Einschrittverfahren hat die **Konsistenzordnung (mindestens) $p \geq 1$** , falls

$$\frac{d^j}{dt^j} f(t, \tilde{\mathbf{y}}(t))|_{t=t_a} = (j+1) \Phi_f^{(j)}(t_a, \mathbf{y}^a, 0), \quad j = 0, \dots, p-1,$$

gilt.

Beispiel 11.25

Das verbesserte Euler-Verfahren hat die Verfahrensvorschrift

$$\Phi(h) = \Phi_f(t_a, y^a, h) = f\left(t_a + \frac{h}{2}, y^a + \frac{h}{2}f(t_a, y^a)\right).$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= f(t_a, y^a), \\ \Phi'(0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t_a, y^a) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t_a, y^a) f(t_a, y^a).\end{aligned}$$

Beispiel 11.25

Das verbesserte Euler-Verfahren hat die Verfahrensvorschrift

$$\Phi(h) = \Phi_f(t_a, y^a, h) = f\left(t_a + \frac{h}{2}, y^a + \frac{h}{2}f(t_a, y^a)\right).$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= f(t_a, y^a), \\ \Phi'(0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t_a, y^a) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t_a, y^a) f(t_a, y^a).\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\frac{d}{dt} f(t, \tilde{y}(t))|_{t=t_a} = \frac{\partial f}{\partial t}(t_a, y^a) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_a, y^a) f(t_a, y^a).$$

Hieraus folgt: die Konsistenzbedingungen sind für $p = 2$ erfüllt.

Hauptsatz Konsistenz–Konvergenz

Satz 11.27: Zusammenhang Konsistenz–Konvergenz

Falls $f(t, y)$ und $\Phi_f(t, y, h)$ je eine Lipschitzbedingung bzgl. y erfüllen, so gilt für das ESV

$$\|e_h\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \|\mathbf{y}(t_j) - \mathbf{y}^j\| \leq e^{\bar{L}(T-t_0)} \sum_{i=0}^{n-1} \|\delta_{i,h}\|,$$

wobei \bar{L} die Lipschitzkonstante für die Verfahrensvorschrift Φ_f ist.

Hauptsatz Konsistenz–Konvergenz

Satz 11.27: Zusammenhang Konsistenz–Konvergenz

Falls $f(t, y)$ und $\Phi_f(t, y, h)$ je eine Lipschitzbedingung bzgl. y erfüllen, so gilt für das ESV

$$\|e_h\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \|\mathbf{y}(t_j) - \mathbf{y}^j\| \leq e^{\bar{L}(T-t_0)} \sum_{i=0}^{n-1} \|\delta_{i,h}\|,$$

wobei \bar{L} die Lipschitzkonstante für die Verfahrensvorschrift Φ_f ist.

Falls das ESV **Konsistenzordnung** p hat, folgt daraus für den globalen Diskretisierungsfehler e_h :

$$\|e_h\|_\infty \leq (T - t_0) e^{\bar{L}(T-t_0)} \max_{i=0, \dots, n-1} \|\tau_{i,h}\| \leq ch^p.$$

Hauptsatz Konsistenz–Konvergenz

Satz 11.27: Zusammenhang Konsistenz–Konvergenz

Falls $f(t, y)$ und $\Phi_f(t, y, h)$ je eine Lipschitzbedingung bzgl. y erfüllen, so gilt für das ESV

$$\|e_h\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \|\mathbf{y}(t_j) - \mathbf{y}^j\| \leq e^{\bar{L}(T-t_0)} \sum_{i=0}^{n-1} \|\delta_{i,h}\|,$$

wobei \bar{L} die Lipschitzkonstante für die Verfahrensvorschrift Φ_f ist.

Falls das ESV **Konsistenzordnung** p hat, folgt daraus für den globalen Diskretisierungsfehler e_h :

$$\|e_h\|_\infty \leq (T - t_0) e^{\bar{L}(T-t_0)} \max_{i=0, \dots, n-1} \|\tau_{i,h}\| \leq ch^p.$$

Kompakte Formulierung dieses Resultats:

Konsistenz der Ordnung $p \Rightarrow$ **Konvergenz** der Ordnung p .

Beispiel 11.28

$$\begin{aligned}y'(t) &= \lambda y(t) + g(t), \quad t \in [0, T], \\y(0) &= y^0,\end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$ eine Konstante und $g \in C^1([0, T])$ eine bekannte Funktion.
Das entsprechende Euler-Verfahren:

$$y^{j+1} = y^j + h \left(\lambda y^j + g(t_j) \right).$$

Beispiel 11.28

$$\begin{aligned}y'(t) &= \lambda y(t) + g(t), \quad t \in [0, T], \\y(0) &= y^0,\end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$ eine Konstante und $g \in C^1([0, T])$ eine bekannte Funktion.
Das entsprechende Euler-Verfahren:

$$y^{j+1} = y^j + h \left(\lambda y^j + g(t_j) \right).$$

Für den **lokalen Abbruchfehler** gilt

$$\delta_{j,h} = y(t_{j+1}) - y(t_j) - hf(t_j, y(t_j)),$$

und damit

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + h(\lambda y(t_j) + g(t_j)) + \delta_{j,h}.$$

Für den **globalen Diskretisierungsfehler** $e_h(t_j) := y(t_j) - y^j$:

$$e_h(t_{j+1}) = (1 + h\lambda)e_h(t_j) + \delta_{j,h}$$

Beispiel 11.28

Daraus folgt

$$e_h(t_1) = (1 + h\lambda)e_h(t_0) + \delta_{0,h} = \delta_{0,h}$$

$$e_h(t_2) = (1 + h\lambda)e_h(t_1) + \delta_{1,h} = (1 + h\lambda)\delta_{0,h} + \delta_{1,h}$$

\vdots

$$e_h(t_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + h\lambda)^i \delta_{n-1-i,h}.$$

Beispiel 11.28

Daraus folgt

$$e_h(t_1) = (1 + h\lambda)e_h(t_0) + \delta_{0,h} = \delta_{0,h}$$

$$e_h(t_2) = (1 + h\lambda)e_h(t_1) + \delta_{1,h} = (1 + h\lambda)\delta_{0,h} + \delta_{1,h}$$

$$\vdots$$

$$e_h(t_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + h\lambda)^i \delta_{n-1-i,h}.$$

Also, wegen $|1 + h\lambda|^i \leq e^{T|\lambda|}$,

$$\begin{aligned} |e_h(t_n)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |1 + h\lambda|^i |\delta_{n-1-i,h}| \\ &\leq e^{T|\lambda|} \sum_{i=0}^{n-1} ch^2 = e^{T|\lambda|} nch^2 = e^{T|\lambda|} cTh =: Mh. \end{aligned}$$

Runge-Kutta-Einschrittverfahren

Herleitungsprinzip: Man sucht eine **Quadratur-Formel** der Form

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds \approx h \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i,$$

wobei γ_i geeignete Gewichte sind und

$$k_i = f(s_i, \hat{y}_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

entsprechende f -Auswertungen sind.

Runge-Kutta-Einschrittverfahren

Herleitungsprinzip: Man sucht eine **Quadratur-Formel** der Form

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds \approx h \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i,$$

wobei γ_i geeignete Gewichte sind und

$$k_i = f(s_i, \hat{y}_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

entsprechende f -Auswertungen sind.

Dies führt zu den **m -stufigen RK-Verfahren** der Form

$$y^{j+1} = y^j + h \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Runge-Kutta-Einschrittverfahren

Herleitungsprinzip: Man sucht eine **Quadratur-Formel** der Form

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds \approx h \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i,$$

wobei γ_i geeignete Gewichte sind und

$$k_i = f(s_i, \hat{y}_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

entsprechende f -Auswertungen sind.

Dies führt zu den **m -stufigen RK-Verfahren** der Form

$$y^{j+1} = y^j + h \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Man konstruiert die “Hilfsrichtungen” k_i so, dass eine **möglichst hohe Konsistenzordnung** p erreicht wird.

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren

Gegeben: Schrittweiten $(h_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ mit $\sum_{j=0}^{n-1} h_j = T - t_0$.
Berechne für $j = 0, \dots, n - 1$:

$$t_{j+1} = t_j + h \quad (h = h_j)$$

$$k_1 = f(t_j, y^j)$$

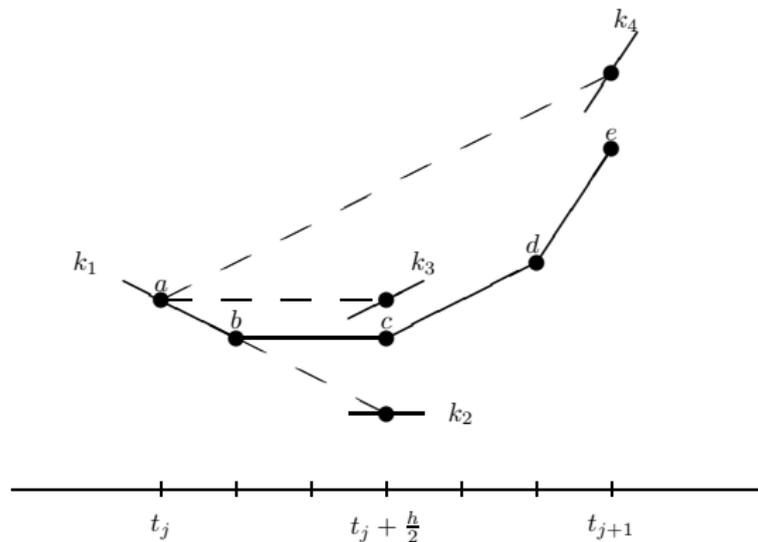
$$k_2 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^j + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^j + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_j + h, y^j + hk_3)$$

$$y^{j+1} = y^j + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) .$$

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren



$$a = y^j$$

$$b = a + \frac{h}{6}k_1$$

$$c = b + \frac{h}{3}k_2$$

$$d = c + \frac{h}{3}k_3$$

$$e = d + \frac{h}{6}k_4 = y^{j+1}$$

Beispiel 11.33

$$y' = \lambda y, \quad y(t_0) = y^0; \quad \text{Lösung: } y(t) = y^0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Klassisches RK-Verfahren mit $y^j = y(t_j)$:

$$k_1 = \lambda y^j = \lambda y(t_j), \quad k_2 = \left(\lambda + \frac{h}{2}\lambda^2\right)y(t_j),$$

$$k_3 = \left(\lambda + \frac{h}{2}\lambda^2 + \frac{h^2}{4}\lambda^3\right)y(t_j),$$

$$k_4 = \left(\lambda + h\lambda^2 + \frac{h^2}{2}\lambda^3 + \frac{h^3}{4}\lambda^4\right)y(t_j),$$

also

$$y^{j+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24}\right)y(t_j)$$

Beispiel 11.33

Es gilt

$$\begin{aligned}y(t_{j+1}) &= y^0 e^{\lambda(t_{j+1}-t_0)} = e^{\lambda h} y(t_j) \\ e^{\lambda h} &= 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Damit erhält man für den **lokalen Abbruchfehler** $\delta_{j,h} = y(t_{j+1}) - y^{j+1}$:

$$\delta_{j,h} = y(t_j) \left(\frac{(\lambda h)^5}{5!} + \frac{(\lambda h)^6}{6!} + \dots \right) = \mathcal{O}(h^5).$$

Beispiel 11.33

Es gilt

$$\begin{aligned}y(t_{j+1}) &= y^0 e^{\lambda(t_{j+1}-t_0)} = e^{\lambda h} y(t_j) \\ e^{\lambda h} &= 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Damit erhält man für den **lokalen Abbruchfehler** $\delta_{j,h} = y(t_{j+1}) - y^{j+1}$:

$$\delta_{j,h} = y(t_j) \left(\frac{(\lambda h)^5}{5!} + \frac{(\lambda h)^6}{6!} + \dots \right) = \mathcal{O}(h^5).$$

Das klassische RK-Verfahren hat in diesem Beispiel eine **Konsistenzordnung** $p = 4$.

Allgemeine m -stufige Runge-Kutta-Verfahren

Gegeben: Gewichte $\alpha_i, \gamma_i, 1 \leq i \leq m$ und $\beta_{i,\ell}, 1 \leq i, \ell \leq m$;

Schrittweiten $(h_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ mit $\sum_{j=0}^{n-1} h_j = T - t_0$.

Berechne für $j = 0, \dots, n - 1$:

$$t_{j+1} = t_j + h \quad (h := h_j)$$

$$k_i = f(t_j + \alpha_i h, y^j + h \sum_{\ell=1}^m \beta_{i,\ell} k_\ell), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y^{j+1} = y^j + h \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell k_\ell .$$

Allgemeine m -stufige Runge-Kutta-Verfahren

Gegeben: Gewichte α_i , γ_i , $1 \leq i \leq m$ und $\beta_{i,\ell}$, $1 \leq i, \ell \leq m$;

Schrittweiten $(h_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ mit $\sum_{j=0}^{n-1} h_j = T - t_0$.

Berechne für $j = 0, \dots, n - 1$:

$$t_{j+1} = t_j + h \quad (h := h_j)$$

$$k_i = f(t_j + \alpha_i h, y^j + h \sum_{\ell=1}^m \beta_{i,\ell} k_\ell), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y^{j+1} = y^j + h \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell k_\ell .$$

Da die k_i in der Regel von allen übrigen k_ℓ , $\ell = 1, \dots, m$, abhängen, ist die Gleichung für k_i als **nichtlineares Gleichungssystem** zu verstehen.

Allgemeine m -stufige Runge-Kutta-Verfahren

Üblicherweise ordnet man die Gewichte in einem **Butcher-Tableau** an:

$$\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,m} \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & & \beta_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m & \beta_{m,1} & & \beta_{m,m} \\ \hline & \gamma_1 & \cdots & \gamma_m \end{array}$$

Allgemeine m -stufige Runge-Kutta-Verfahren

Üblicherweise ordnet man die Gewichte in einem **Butcher-Tableau** an:

$$\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,m} \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & & \beta_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m & \beta_{m,1} & & \beta_{m,m} \\ \hline & \gamma_1 & \cdots & \gamma_m \end{array}$$

Die Gewichte werden so gewählt, dass das Verfahren eine möglichst hohe Konsistenzordnung hat.

Explizite Runge-Kutta-Verfahren

Das Verfahren ist **explizit** falls die k_i nur von k_1, \dots, k_{i-1} abhängen:

$$\beta_{i,\ell} = 0, \quad \ell = i, i + 1, \dots, m.$$

Explizite Runge-Kutta-Verfahren

Das Verfahren ist **explizit** falls die k_i nur von k_1, \dots, k_{i-1} abhängen:

$$\beta_{i,\ell} = 0, \quad \ell = i, i+1, \dots, m.$$

Das entsprechende Butcher-Tableau sieht dann folgendermaßen aus:

α_1					
α_2	$\beta_{2,1}$				
\vdots	$\beta_{3,1}$	$\beta_{3,2}$			
\vdots	\vdots		\ddots		
α_m	$\beta_{m,1}$	\dots	\dots	$\beta_{m,m-1}$	
	γ_1	γ_2	\dots	\dots	γ_m

Explizite Runge-Kutta-Verfahren

Das verbesserte Euler-Verfahren: $m = 2$

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \end{array}$$

Explizite Runge-Kutta-Verfahren

Das verbesserte Euler-Verfahren: $m = 2$

$$\begin{array}{c|c}
 \mathbf{0} & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 \hline
 & \mathbf{0} \quad \mathbf{1}
 \end{array}$$

Das klassische RK-Verfahren: $m = 4$

$$\begin{array}{c|cccc}
 \mathbf{0} & & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
 \frac{1}{2} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} & & \\
 \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren: RKF45

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	nur bei RK5
(a)	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	γ_i bei RK4
(b)	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\tilde{\gamma}_i$ bei RK5

Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren: RKF45

Dieses Verfahren ist für **Fehlerschätzung** gut geeignet.

RK-Verfahren der **Ordnung 4** :

$$y^{j+1} = y^j + h \sum_{\ell=1}^5 \gamma_{\ell} k_{\ell}$$

Mit nur **einer** zusätzlichen Funktionsauswertung kann man den neuen Wert

$$\bar{y}^{j+1} = y^j + h \sum_{\ell=1}^6 \tilde{\gamma}_{\ell} k_{\ell}$$

mit RKF5 (der **Ordnung 5**) berechnen.

Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren: RKF45

Dieses Verfahren ist für **Fehlerschätzung** gut geeignet.

RK-Verfahren der **Ordnung 4** :

$$\mathbf{y}^{j+1} = \mathbf{y}^j + h \sum_{\ell=1}^5 \gamma_{\ell} k_{\ell}$$

Mit nur **einer** zusätzlichen Funktionsauswertung kann man den neuen Wert

$$\bar{\mathbf{y}}^{j+1} = \mathbf{y}^j + h \sum_{\ell=1}^6 \tilde{\gamma}_{\ell} k_{\ell}$$

mit RKF5 (der **Ordnung 5**) berechnen.

Schätzung des lokalen Abbruchfehlers:

$$\tilde{\delta}_{j,h} = \mathbf{y}(t_{j+1}; t_j, \mathbf{y}^j) - \mathbf{y}^{j+1} \approx \bar{\mathbf{y}}^{j+1} - \mathbf{y}^{j+1}.$$

$(\mathbf{y}(t; t_j, \mathbf{y}^j))$: Lösung des Problems $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(t_j) = \mathbf{y}^j$)

Stetige Runge-Kutta-Verfahren

Ziel: Berechnung Annäherungswerte $y^j(t)$, $t_{j-1} \leq t \leq t_j$.

Grundstruktur der Verfahren:

$$y(t_j + \theta h) \approx y^{j+\theta} := y^j + h \sum_{\ell=1}^m \gamma_{\ell}(\theta) k_{\ell}, \quad \theta \in [0, 1].$$

Stetige Runge-Kutta-Verfahren

Ziel: Berechnung Annäherungswerte $y^j(t)$, $t_{j-1} \leq t \leq t_j$.

Grundstruktur der Verfahren:

$$y(t_j + \theta h) \approx y^{j+\theta} := y^j + h \sum_{\ell=1}^m \gamma_{\ell}(\theta) k_{\ell}, \quad \theta \in [0, 1].$$

Die Richtungen k_i werden durch θ -unabhängige Gleichungen bestimmt:

$$k_i = f(t_j + \alpha_i h, y^j + h \sum_{\ell=1}^{i-1} \beta_{i,\ell} k_{\ell}), \quad i = 1, \dots, m.$$

Stetige Runge-Kutta-Verfahren

Ziel: Berechnung Annäherungswerte $y^j(t)$, $t_{j-1} \leq t \leq t_j$.

Grundstruktur der Verfahren:

$$y(t_j + \theta h) \approx y^{j+\theta} := y^j + h \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell(\theta) k_\ell, \quad \theta \in [0, 1].$$

Die Richtungen k_i werden durch θ -unabhängige Gleichungen bestimmt:

$$k_i = f(t_j + \alpha_i h, y^j + h \sum_{\ell=1}^{i-1} \beta_{i,\ell} k_\ell), \quad i = 1, \dots, m.$$

Das Butcher-Tableau:

α_1					
α_2	$\beta_{2,1}$				
\vdots	$\beta_{3,1}$	$\beta_{3,2}$			
\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\ddots	
α_m	$\beta_{m,1}$	\dots	\dots	$\beta_{m,m-1}$	
	$\gamma_1(\theta)$	$\gamma_2(\theta)$	\dots	\dots	$\gamma_m(\theta)$

Beispiel 11.37

Das 3-stufige RK-Verfahren von Heun (links) hat Konsistenzordnung 3.

Dieses Verfahren hat eine **stetige Erweiterung mit Konsistenzordnung 2** gleichmäßig in $\theta \in [0, 1]$.

0		0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			$\gamma_1(\theta) := 1\frac{1}{2}\theta^3 - 2\frac{1}{4}\theta^2$
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$		$\gamma_2(\theta) := 3\theta^2(1 - \theta)$
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\gamma_1(\theta)$	$\gamma_2(\theta)$	$\gamma_3(\theta) := \frac{3}{4}\theta^2(2\theta - 1)$

Analyse expliziter RK-Verfahren

Stabilitätsfunktion

Für ein **explizites** m -stufiges RK-Verfahren angewandt auf

$$y' = \lambda y, \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y^0,$$

ergibt sich die Rekursion (mit ggf. $h = h_j$)

$$y^{j+1} = g(\lambda h) y^j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

wobei $g(z)$ ein Polynom vom Grade höchstens m ist.

Analyse expliziter RK-Verfahren

Stabilitätsfunktion

Für ein **explizites** m -stufiges RK-Verfahren angewandt auf

$$y' = \lambda y, \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y^0,$$

ergibt sich die Rekursion (mit ggf. $h = h_j$)

$$y^{j+1} = g(\lambda h) y^j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

wobei $g(z)$ ein Polynom vom Grade höchstens m ist.

Das Polynom g wird die **Stabilitätsfunktion** des Verfahrens genannt.

Analyse expliziter RK-Verfahren

Konsistenzordnung

Die Konsistenzordnung eines m -stufigen expliziten RK-Verfahrens ist höchstens $p \leq m$.

Analyse expliziter RK-Verfahren

Konsistenzordnung

Die Konsistenzordnung eines m -stufigen expliziten RK-Verfahrens ist höchstens $p \leq m$.

Einige höchstmöglich erreichbare Ordnungen $p(m)$:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	$m \geq 9$
$p(m)$	1	2	3	4	4	5	6	6	$\leq m - 2$

Analyse expliziter RK-Verfahren

Konsistenzordnung

Die Konsistenzordnung eines m -stufigen expliziten RK-Verfahrens ist höchstens $p \leq m$.

Einige höchstmöglich erreichbare Ordnungen $p(m)$:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	$m \geq 9$
$p(m)$	1	2	3	4	4	5	6	6	$\leq m - 2$

Konvergenz

Falls $f(t, \mathbf{y})$ eine Lipschitzbedingung bzgl. \mathbf{y} erfüllt, so genügt auch die Verfahrensvorschrift $\Phi_f(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i(t, \mathbf{y}, h)$ eines m -stufigen expliziten RK-Verfahrens einer Lipschitzbedingung bzgl. \mathbf{y} .

Das Verfahren konvergiert dann mit der Konsistenzordnung.

Implizite RK-Verfahren

Satz 11.41: Konsistenzordnung

Die Funktion f erfülle eine Lipschitzbedingung bzgl. y . Wählt man zu paarweise verschiedenen $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$, die Parameter $\gamma_i \neq 0$, $\beta_{j,i}$, $1 \leq i, j \leq m$, so dass für $r \geq m + 1$ die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \alpha_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, r,$$

sowie

$$\sum_{i=1}^m \beta_{j,i} \alpha_i^{k-1} = \frac{\alpha_j^k}{k}, \quad 1 \leq j, k \leq m,$$

gelten, dann hat das zugehörige **RK-Verfahren** Konsistenzordnung $p = r$.

RK-Gauß-Verfahren

Die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \alpha_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, r,$$

gelten, genau dann wenn die Quadraturformel

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i g(\alpha_i) \approx \int_0^1 g(s) ds$$

exakt vom Grade $r - 1$ ist.

RK-Gauß-Verfahren

Die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \alpha_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, r,$$

gelten, genau dann wenn die Quadraturformel

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i g(\alpha_i) \approx \int_0^1 g(s) ds$$

exakt vom Grade $r - 1$ ist.

Konstruktion: man wählt die Stützstellen α_i und Gewichte γ_i wie in einer Gauß-Quadraturformel.

Die Koeffizienten $(\beta_{j,i})_{1 \leq j, i \leq m}$ werden durch die weiteren Bedingungen eindeutig festgelegt.

Die resultierenden Verfahren sind die Runge-Kutta-Gauß-Verfahren.

Diese haben die Konsistenzordnung $2m$, welche die maximale ist.

Beispiel 11.42

Die RK-Gauß-Verfahren für $m = 1$ (mit Konsistenzordnung 2) und $m = 2$ (mit Konsistenzordnung 4) sind gegeben durch:

$$\begin{array}{c|c}
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 \hline
 & \mathbf{1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|cc}
 \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Stabilitätsfunktion impliziter RK-Gauß-Verfahren

Bezeichnungen:

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)^T, \quad \boldsymbol{\gamma} := (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$$
$$B := (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}, \quad \mathbf{1} := (1, \dots, 1)^T.$$

Für ein implizites RK-Verfahren angewandt auf

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{y}, \quad t \in [t_0, T], \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0,$$

gilt

$$\mathbf{y}^{j+1} = (1 + h\lambda\boldsymbol{\gamma}^T(I - h\lambda B)^{-1}\mathbf{1})\mathbf{y}^j =: g(h\lambda)\mathbf{y}^j.$$

Stabilitätsfunktion impliziter RK-Gauß-Verfahren

Bezeichnungen:

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)^T, \quad \boldsymbol{\gamma} := (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$$
$$\mathbf{B} := (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}, \quad \mathbf{1} := (1, \dots, 1)^T.$$

Für ein implizites RK-Verfahren angewandt auf

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{y}, \quad t \in [t_0, T], \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0,$$

gilt

$$\mathbf{y}^{j+1} = (1 + h\lambda\boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{I} - h\lambda\mathbf{B})^{-1}\mathbf{1})\mathbf{y}^j =: g(h\lambda)\mathbf{y}^j.$$

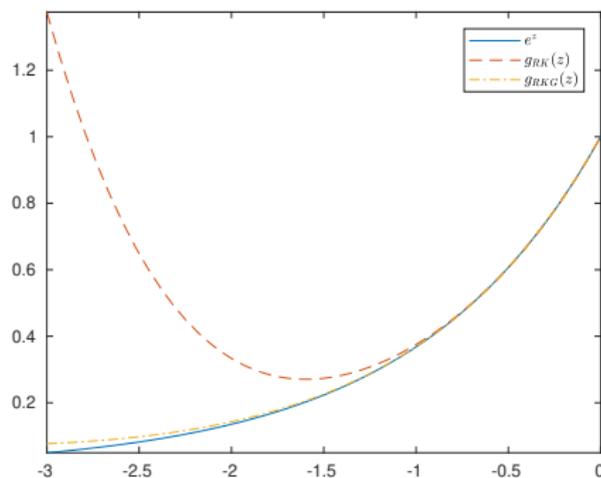
Die **Stabilitätsfunktion** $g(z) = 1 + z\boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{I} - z\mathbf{B})^{-1}\mathbf{1}$ ist in eine **rationale Funktion** (ein Quotient zweier Polynome).

Beispiel 11.44

Das RK-Gauß-Verfahren mit $m = 2$ hat die Stabilitätsfunktion

$$g_{RKG}(z) = 1 + z\gamma^T(I - zB)^{-1}\mathbf{1} = \frac{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2}{1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2}$$

Das klassische RK-Verfahren: $g_{RK}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$.



Schrittweitensteuerung bei Einschrittverfahren

Vorgegebene **Gesamtfehlertoleranz**:

$$\|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_h(T)\| \leq (T - t_0)\epsilon$$

Schrittweitensteuerung basiert auf folgender Strategie.

Ansatz:

$$\|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_h(T)\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|\tilde{\delta}_{j,h}\|.$$

Schrittweitensteuerung bei Einschrittverfahren

Vorgegebene **Gesamtfehlertoleranz**:

$$\|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_h(T)\| \leq (T - t_0)\epsilon$$

Schrittweitensteuerung basiert auf folgender Strategie.

Ansatz:

$$\|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_h(T)\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|\tilde{\delta}_{j,h}\|.$$

Falls

$$\|\tilde{\delta}_{j,h}\| \leq (t_{j+1} - t_j)\epsilon$$

gilt, folgt daraus

$$\sum_{j=0}^{n-1} \|\tilde{\delta}_{j,h}\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)\epsilon = (T - t_0)\epsilon.$$

Schrittweitensteuerung bei Einschrittverfahren

Eine Methode zur Schrittweitensteuerung hat folgende Struktur:

- a) Verwende ein Verfahren zur **Schätzung des lokalen Abbruchfehlers**.
- b) Anhand der Schätzung $s(\mathbf{h}) \approx \|\tilde{\delta}_{j,h}\|$ des lokalen Fehlers wird **$\mathbf{h} = \mathbf{h}_j$ gewählt**, so dass

$$\|\tilde{\delta}_{j,h}\| \leq (t_{j+1} - t_j)\epsilon$$

näherungsweise erfüllt ist, D.h., $s(\mathbf{h}_j) \lesssim \mathbf{h}_j\epsilon$.

Schätzung des lokalen Abbruchfehlers

(i) Ausgehend von t_j und y^j berechne

- einen Schritt mit der Schrittweite h : Resultat y^{j+1} .
- zwei Schritte mit der Schrittweite $\frac{h}{2}$: Das (genauere) Resultat \hat{y}^{j+1} .

$$s(h) := \frac{1}{2^p - 1} \|\hat{y}^{j+1} - y^{j+1}\| \approx \|\tilde{y}(t_{j+1}) - \hat{y}^{j+1}\| = \|\tilde{\delta}_{j,h}\|$$

eine Schätzung des lokalen Abbruchfehlers im genaueren Resultat \hat{y}^{j+1} .

Schätzung des lokalen Abbruchfehlers

(i) Ausgehend von t_j und y^j berechne

- einen Schritt mit der Schrittweite h : Resultat y^{j+1} .
- zwei Schritte mit der Schrittweite $\frac{h}{2}$: Das (genauere) Resultat \hat{y}^{j+1} .

$$s(h) := \frac{1}{2^p - 1} \|\hat{y}^{j+1} - y^{j+1}\| \approx \|\tilde{y}(t_{j+1}) - \hat{y}^{j+1}\| = \|\tilde{\delta}_{j,h}\|$$

eine Schätzung des lokalen Abbruchfehlers im genaueren Resultat \hat{y}^{j+1} .

(ii) Eingebettete RK-Verfahren liefern zwei Ergebnisse, deren Differenz als Schätzer dienen kann.

Anpassung der lokalen Schrittweite

Für eine Methode mit Konsistenzordnung p gilt

$$\|\tilde{\delta}_{j,h}\| \approx s(h) \approx ch^{p+1}$$

Es sei $q(h) := \frac{s(h)}{\epsilon h}$.

Falls $q(h) \leq 1$, wird die Schrittweite h akzeptiert: $t_{j+1} = t_j + h$.

Es soll eine neue Zeitschrittweite $h_{\text{neu}} = h_{j+1}$ gewählt werden.

Im Fall $q(h) > 1$ soll eine kleinere Zeitschrittweite h_{neu} gewählt werden.

Anpassung der lokalen Schrittweite

Für eine Methode mit Konsistenzordnung p gilt

$$\|\tilde{\delta}_{j,h}\| \approx s(h) \approx ch^{p+1}$$

Es sei $q(h) := \frac{s(h)}{\epsilon h}$.

Falls $q(h) \leq 1$, wird die Schrittweite h akzeptiert: $t_{j+1} = t_j + h$.

Es soll eine neue Zeitschrittweite $h_{\text{neu}} = h_{j+1}$ gewählt werden.

Im Fall $q(h) > 1$ soll eine kleinere Zeitschrittweite h_{neu} gewählt werden.

Kriterium: $\frac{ch_{\text{neu}}^{p+1}}{\epsilon h_{\text{neu}}} \approx 1$. Wegen

$$1 \approx \frac{ch_{\text{neu}}^{p+1}}{\epsilon h_{\text{neu}}} = \frac{ch^{p+1}}{\epsilon h} \left(\frac{h_{\text{neu}}}{h}\right)^p \approx \frac{s(h)}{\epsilon h} \left(\frac{h_{\text{neu}}}{h}\right)^p = q(h) \left(\frac{h_{\text{neu}}}{h}\right)^p,$$

ergibt sich

$$h_{\text{neu}} \approx q(h)^{-\frac{1}{p}} h.$$

Beispiel 11.45

Wir betrachten die Van der Pol-Gleichung

$$\begin{aligned}y''(t) &= 8(1 - y(t)^2) y'(t) - y(t), & t \in [0, 30], \\y(0) &= 2, \quad y'(0) = 0.\end{aligned}$$

Beispiel 11.45

Wir betrachten die Van der Pol-Gleichung

$$\begin{aligned}y''(t) &= 8(1 - y(t)^2) y'(t) - y(t), & t \in [0, 30], \\y(0) &= 2, \quad y'(0) = 0.\end{aligned}$$

Dieses Problem wird als System 1. Ordnung formuliert:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ 8(1 - y_1(t)^2) y_2(t) - y_1(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 30],$$

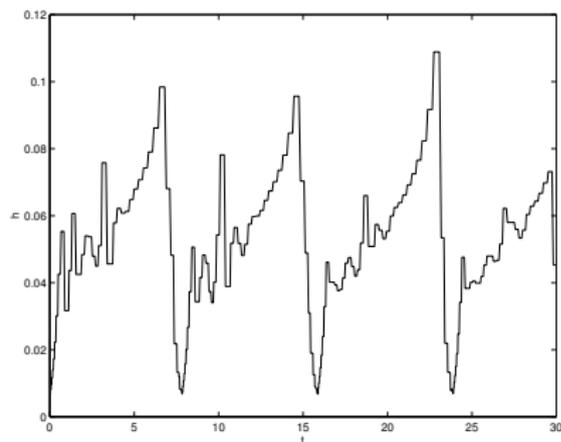
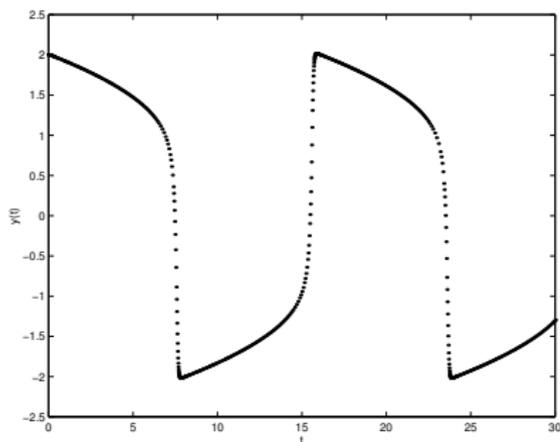
mit dem Anfangswert

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Problem wird mit einem [RKF45-Verfahren](#) gelöst, wobei eine [adaptive Schrittweitensteuerung](#) verwendet wird.

Beispiel 11.45

Numerische Lösung $y_1^j \approx y(t_j)$ (links) und Schrittweiten $h_j = t_{j+1} - t_j$.



Lineare Mehrschrittverfahren

Seien k Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} gegeben.

Die allgemeine Vorschrift eines k -Schrittverfahrens:

$$\Psi_f : \left(t_{j+k-1}, y^j, y^{j+1}, \dots, y^{j+k-1}, h \right) \rightarrow y^{j+k}, \quad j = 0, \dots, n-k.$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Seien k Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} gegeben.

Die allgemeine Vorschrift eines k -Schrittverfahrens:

$$\Psi_f : \left(t_{j+k-1}, y^j, y^{j+1}, \dots, y^{j+k-1}, h \right) \rightarrow y^{j+k}, \quad j = 0, \dots, n-k.$$

Am häufigsten verwendet man **lineare Mehrschrittverfahren**:

$$\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} y^{j+\ell} = h \sum_{\ell=0}^k b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}), \quad j = 0, \dots, n-k,$$

wobei die a_{ℓ}, b_{ℓ} mit $a_k \neq 0$ fest gewählte Koeffizienten sind und stets

$$t_j = t_0 + jh, \quad j = 0, \dots, n,$$

mit **konstanter Schrittweite** $h = \frac{T-t_0}{n}$. O.b.d.A.: $a_k = 1$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Lineares k -Schrittverfahren (Algorithmus 11.47)

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$,
 Koeffizienten a_ℓ ($0 \leq \ell \leq k-1$), b_ℓ ($0 \leq \ell \leq k$),
 Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} . Berechne für $j = 0, \dots, n-k$:

$$y^{j+k} = - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell y^{j+\ell} + h \sum_{\ell=0}^k b_\ell f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}) ,$$

oder äquivalent

$$y^{j+k} - h b_k f(t_{j+k}, y^{j+k}) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(-a_\ell y^{j+\ell} + h b_\ell f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}) \right) .$$

$b_k = 0$: explizites Verfahren; $b_k \neq 0$: implizites Verfahren.

Lineare Mehrschrittverfahren

► Adams-Bashforth-Verfahren:

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = 0, \quad a_{k-1} = -1, \quad b_k = 0,$$

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^{k-1} b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

Lineare Mehrschrittverfahren

- ▶ Adams-Bashforth-Verfahren:

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = 0, \quad a_{k-1} = -1, \quad b_k = 0,$$

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^{k-1} b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

- ▶ Adams-Moulton-Verfahren:

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = 0, \quad a_{k-1} = -1, \quad b_k \neq 0,$$

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^k b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

Lineare Mehrschrittverfahren

- ▶ Adams-Bashforth-Verfahren:

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = 0, \quad a_{k-1} = -1, \quad b_k = 0,$$

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^{k-1} b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

- ▶ Adams-Moulton-Verfahren:

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = 0, \quad a_{k-1} = -1, \quad b_k \neq 0,$$

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^k b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

- ▶ Rückwärtsdifferenzenmethoden:

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0, \quad b_k \neq 0,$$

$$y^{j+k} = - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{\ell} y^{j+\ell} + h b_k f(t_{j+k}, y^{j+k}).$$

Konsistenzfehler bei LMSV

Der lokale Abbruchfehler (im Intervall $[t_{j+k-1}, t_{j+k}]$) ist definiert durch

$$\delta_{j+k-1,h} := y(t_{j+k}) - y_h(t_{j+k}) ,$$

wobei $y_h(t_{j+k})$ das Resultat des linearen Mehrschrittverfahrens mit $y^{j+\ell} = y(t_{j+\ell})$, $\ell = 0, \dots, k-1$.

Konsistenzfehler bei LMSV

Der lokale Abbruchfehler (im Intervall $[t_{j+k-1}, t_{j+k}]$) ist definiert durch

$$\delta_{j+k-1,h} := y(t_{j+k}) - y_h(t_{j+k}),$$

wobei $y_h(t_{j+k})$ das Resultat des linearen Mehrschrittverfahrens mit $y^{j+\ell} = y(t_{j+\ell})$, $\ell = 0, \dots, k-1$.

Bei **expliziten** Verfahren:

$$\begin{aligned} \delta_{j+k-1,h} &:= y(t_{j+k}) - y_h(t_{j+k}) \\ &= y(t_{j+k}) - \sum_{\ell=0}^{k-1} (-a_{\ell} y(t_{j+\ell}) + h b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y(t_{j+\ell}))). \end{aligned}$$

Konsistenzfehler bei LMSV

Der lokale Abbruchfehler (im Intervall $[t_{j+k-1}, t_{j+k}]$) ist definiert durch

$$\delta_{j+k-1,h} := \mathbf{y}(t_{j+k}) - \mathbf{y}_h(t_{j+k}),$$

wobei $\mathbf{y}_h(t_{j+k})$ das Resultat des linearen Mehrschrittverfahrens mit $\mathbf{y}^{j+\ell} = \mathbf{y}(t_{j+\ell})$, $\ell = 0, \dots, k-1$.

Bei **expliziten** Verfahren:

$$\begin{aligned} \delta_{j+k-1,h} &:= \mathbf{y}(t_{j+k}) - \mathbf{y}_h(t_{j+k}) \\ &= \mathbf{y}(t_{j+k}) - \sum_{\ell=0}^{k-1} (-a_{\ell} \mathbf{y}(t_{j+\ell}) + h b_{\ell} f(t_{j+\ell}, \mathbf{y}(t_{j+\ell}))). \end{aligned}$$

Konsistenzordnung p :

$$\|\tau_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^p), \quad \tau_{j,h} := \delta_{j,h}/h.$$

Konsistenzfehler bei LMSV

Satz 11.48

Das lineare Mehrschrittverfahren ist konsistent von der Ordnung p genau dann, wenn die folgenden $p + 1$ Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} = 0,$$

$$\sum_{\ell=0}^k \ell a_{\ell} - b_{\ell} = 0,$$

$$\sum_{\ell=0}^k (\ell^{\nu} a_{\ell} - \nu \ell^{\nu-1} b_{\ell}) = 0, \quad \nu = 2, \dots, p.$$

Adams-Bashforth-Verfahren

k-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahren

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$,

Koeffizienten $b_{k,\ell}$ ($0 \leq \ell \leq k-1$), Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} .

Berechne für $j = 0, \dots, n-k$:

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^{k-1} b_{k,\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}) .$$

Adams-Bashforth-Verfahren

k-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahren

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$,
Koeffizienten $b_{k,\ell}$ ($0 \leq \ell \leq k-1$), Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} .
Berechne für $j = 0, \dots, n-k$:

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^{k-1} b_{k,\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}) .$$

Herleitungsprinzip: Diskretisierung der Integralgleichung

$$y(t_{j+k}) = y(t_{j+k-1}) + \int_{t_{j+k-1}}^{t_{j+k}} f(s, y(s)) ds$$

mit Hilfe von Newton-Cotes-Formeln.

Beispiel 11.51

$k = 2$: Das Integral

$$\int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} f(s, y(s)) ds =: \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} g(s) ds =: I(g)$$

wird approximiert. Es sei

$$P(g|t_j, t_{j+1})(s) = \frac{t_{j+1} - s}{h} g(t_j) + \frac{s - t_j}{h} g(t_{j+1})$$

das lineare Interpolationspolynom an den Stützstellen t_j, t_{j+1} .

Beispiel 11.51

$k = 2$: Das Integral

$$\int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} f(s, y(s)) ds =: \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} g(s) ds =: I(g)$$

wird approximiert. Es sei

$$P(g|t_j, t_{j+1})(s) = \frac{t_{j+1} - s}{h} g(t_j) + \frac{s - t_j}{h} g(t_{j+1})$$

das lineare Interpolationspolynom an den Stützstellen t_j, t_{j+1} .

Die entsprechende **Newton-Cotes-Quadraturformel** $I_1(g) \approx I(g)$:

$$I_1(g) = \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} P(g|t_j, t_{j+1})(s) ds = -\frac{1}{2}hg(t_j) + \frac{3}{2}hg(t_{j+1}).$$

Beispiel 11.51

$k = 2$: Das Integral

$$\int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} f(s, y(s)) ds =: \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} g(s) ds =: I(g)$$

wird approximiert. Es sei

$$P(g|t_j, t_{j+1})(s) = \frac{t_{j+1} - s}{h}g(t_j) + \frac{s - t_j}{h}g(t_{j+1})$$

das lineare Interpolationspolynom an den Stützstellen t_j, t_{j+1} .

Die entsprechende **Newton-Cotes-Quadraturformel** $I_1(g) \approx I(g)$:

$$I_1(g) = \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} P(g|t_j, t_{j+1})(s) ds = -\frac{1}{2}hg(t_j) + \frac{3}{2}hg(t_{j+1}).$$

\Rightarrow Koeffizienten $b_{2,0} = -\frac{1}{2}$, $b_{2,1} = \frac{3}{2}$.

Beispiel 11.51

Quadraturfehler:

$$I(g) - I_1(g) = \frac{g''(\xi)}{2} \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} (s - t_j)(s - t_{j+1}) ds = \frac{5}{12} h^3 g''(\xi)$$

Beispiel 11.51

Quadraturfehler:

$$I(g) - I_1(g) = \frac{g''(\xi)}{2} \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} (s - t_j)(s - t_{j+1}) ds = \frac{5}{12} h^3 g''(\xi)$$

Daraus erhält man für den **lokalen Abbruchfehler**:

$$\begin{aligned} \delta_{j+1,h} &= y(t_{j+2}) - y(t_{j+1}) - h \sum_{\ell=0}^1 b_{2,\ell} f(t_{j+\ell}, y(t_{j+\ell})) \\ &= \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} y'(s) ds - I_1(g) = \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} f(s, y(s)) ds - I_1(g) \\ &= I(g) - I_1(g) = \frac{5}{12} h^3 g''(\xi), \end{aligned}$$

woraus folgt, dass diese Methode **die Konsistenzordnung 2** hat.

Adams-Bashforth-Verfahren

k	ℓ	0	1	2	3	4	Ordnung
1	$b_{1,\ell}$	1					1
2	$2 b_{2,\ell}$	-1	3				2
3	$12 b_{3,\ell}$	5	-16	23			3
4	$24 b_{4,\ell}$	-9	37	-59	55		4
5	$720 b_{5,\ell}$	251	-1274	2616	-2774	1901	5

Adams-Moulton-Verfahren

k-Schritt-Adams-Moulton-Verfahren

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$,

Koeffizienten $b_{k,\ell}$ ($0 \leq \ell \leq k$), Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} .

Berechne für $j = 0, \dots, n - k$:

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^k b_{k,\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

Adams-Moulton-Verfahren

k-Schritt-Adams-Moulton-Verfahren

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$,
Koeffizienten $b_{k,\ell}$ ($0 \leq \ell \leq k$), Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} .
Berechne für $j = 0, \dots, n - k$:

$$y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^k b_{k,\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

Herleitungsprinzip: Diskretisierung der Integralgleichung

$$y(t_{j+k}) = y(t_{j+k-1}) + \int_{t_{j+k-1}}^{t_{j+k}} f(s, y(s)) ds$$

mit Hilfe von Newton-Cotes-Formeln.

Beispiel 11.53

$k = 1$: Das Integral

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds =: \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s) ds =: I(g)$$

wird mit Hilfe der Newton-Cotes-Formel zu den Stützstellen t_j, t_{j+1} approximiert. Diese Formel ist gerade die Trapezmethode:

$$I_1(g) = \frac{1}{2}h (g(t_j) + g(t_{j+1})) .$$

Beispiel 11.53

$k = 1$: Das Integral

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds =: \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s) ds =: I(g)$$

wird mit Hilfe der Newton-Cotes-Formel zu den Stützstellen t_j, t_{j+1} approximiert. Diese Formel ist gerade die Trapezmethode:

$$I_1(g) = \frac{1}{2}h (g(t_j) + g(t_{j+1})).$$

\Rightarrow Koeffizienten $b_{1,0} = b_{1,1} = \frac{1}{2}$.

Beispiel 11.53

$k = 1$: Das Integral

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds =: \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s) ds =: I(g)$$

wird mit Hilfe der Newton-Cotes-Formel zu den Stützstellen t_j, t_{j+1} approximiert. Diese Formel ist gerade die Trapezmethode:

$$I_1(g) = \frac{1}{2}h (g(t_j) + g(t_{j+1})).$$

\Rightarrow Koeffizienten $b_{1,0} = b_{1,1} = \frac{1}{2}$. Mit Hilfe von

$$I(g) - I_1(g) = -\frac{1}{12}h^3 g''(\xi)$$

ergibt sich für den lokalen Abbruchfehler

$$\delta_{j,h} = \mathcal{O}(h^3).$$

Diese Methode hat damit [die Konsistenzordnung 2](#).

Adams-Moulton-Verfahren

k	ℓ	0	1	2	3	4	Ordnung
1	$2 b_{1,\ell}$	1	1				2
2	$12 b_{2,\ell}$	-1	8	5			3
3	$24 b_{3,\ell}$	1	-5	19	9		4
4	$720 b_{4,\ell}$	-19	106	-264	646	251	5

Adams-Moulton-Verfahren

k	ℓ	0	1	2	3	4	Ordnung
1	$2 b_{1,\ell}$	1	1				2
2	$12 b_{2,\ell}$	-1	8	5			3
3	$24 b_{3,\ell}$	1	-5	19	9		4
4	$720 b_{4,\ell}$	-19	106	-264	646	251	5

Konsistenzordnungen

Die k -Schritt-Adams-Bashforth-Verfahren haben die Ordnung $p = k$ und die k -Schritt-Adams-Moulton-Verfahren die Ordnung $p = k + 1$.

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

- ▶ **Prädiktor:** Bestimme einen Startwert $y^{j+1,0}$ (AB-Verfahren):

$$y^{j+1,0} = y^j + h \sum_{m=0}^{k_1-1} b_{k_1, k_1-1-m} f(t_{j-m}, y^{j-m}).$$

- ▶ **Korrektor:** In einem AM-Verfahren wird y^{j+1} iterativ über $M + 1$ Iterationen einer Fixpunktiteration angenähert:

Für $i = 0, 1, 2, \dots, M$:

$$y^{j+1, i+1} = y^j + h b_{k_2, k_2} f(t_{j+1}, y^{j+1, i}) \\ + h \sum_{m=0}^{k_2-1} b_{k_2, k_2-1-m} f(t_{j-m}, y^{j-m});$$

$$y^{j+1} := y^{j+1, M+1}$$

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Konsistenzordnung

Die Methode hat die Konsistenzordnung

$$p = \min\{k_1 + 1 + M, k_2 + 1\}.$$

Deswegen wählt man in der Praxis häufig $k_2 = k_1$ und $M = 0$ also nur **eine** Iteration der Fixpunktiteration im Korrektor.

Beispiel 11.55

Für den Fall $k_1 = k_2 = 3$, $M = 0$ ergibt sich das (explizite) Prädiktor-Korrektor-Verfahren (ABM3)

$$y^{j+1,0} = y^j + \frac{h}{12} \left(23f(t_j, y^j) - 16f(t_{j-1}, y^{j-1}) + 5f(t_{j-2}, y^{j-2}) \right)$$

$$y^{j+1,1} = y^j + \frac{h}{24} \left(9f(t_{j+1}, y^{j+1,0}) + 19f(t_j, y^j) \right. \\ \left. - 5f(t_{j-1}, y^{j-1}) + f(t_{j-2}, y^{j-2}) \right)$$

$$y^{j+1} := y^{j+1,1}.$$

Beispiel 11.56

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y - (\lambda + 1)e^{-t}, \quad t \in [0, 2], \quad y(0) = 1,$$

mit einer Konstante $\lambda < 0$.

Die Lösung dieses Problems: $y(t) = e^{-t}$ (unabhängig von λ).

Beispiel 11.56

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y - (\lambda + 1)e^{-t}, \quad t \in [0, 2], \quad y(0) = 1,$$

mit einer Konstante $\lambda < 0$.

Die Lösung dieses Problems: $y(t) = e^{-t}$ (unabhängig von λ).

Wir wenden das **4-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahren** (AB4) und das **Prädiktor-Korrektor-Verfahren** (ABM3) an.

Beide Methoden haben die **Konsistenzordnung 4**.

Die Startwerte y^1, y^2, y^3 werden mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren berechnet.

Beispiel 11.56

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y - (\lambda + 1)e^{-t}, \quad t \in [0, 2], \quad y(0) = 1,$$

mit einer Konstante $\lambda < 0$.

Die Lösung dieses Problems: $y(t) = e^{-t}$ (unabhängig von λ).

Wir wenden das **4-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahren** (AB4) und das **Prädiktor-Korrektor-Verfahren** (ABM3) an.

Beide Methoden haben die Konsistenzordnung 4.

Die Startwerte y^1, y^2, y^3 werden mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren berechnet.

Die resultierenden Fehler $|y_h(2) - y(2)| = |y^{2/h} - e^{-2}|$ sind in der Tabelle für einige Schrittweiten h und $\lambda \in \{-2, -20\}$ aufgelistet.

Beispiel 11.56

h	$\lambda = -2, y^{2/h} - e^{-2} $		$\lambda = -20, y^{2/h} - e^{-2} $	
	AB4	ABM3	AB4	ABM3
2^{-3}	1.17e-05	8.93e-06	1.40e+07	2.40e-01
2^{-4}	6.69e-07	5.04e-07	3.31e+09	6.10e-07
2^{-5}	4.03e-08	2.99e-08	8.85e+07	2.57e-08
2^{-6}	2.48e-09	1.82e-09	4.38e-07	1.36e-09
2^{-7}	1.53e-10	1.13e-10	9.36e-12	7.91e-11

Beispiel 11.56

h	$\lambda = -2, y^{2/h} - e^{-2} $		$\lambda = -20, y^{2/h} - e^{-2} $	
	AB4	ABM3	AB4	ABM3
2^{-3}	1.17e-05	8.93e-06	1.40e+07	2.40e-01
2^{-4}	6.69e-07	5.04e-07	3.31e+09	6.10e-07
2^{-5}	4.03e-08	2.99e-08	8.85e+07	2.57e-08
2^{-6}	2.48e-09	1.82e-09	4.38e-07	1.36e-09
2^{-7}	1.53e-10	1.13e-10	9.36e-12	7.91e-11

Beobachtung:

Für $\lambda = -20$ stellen sich bei AB4 für die Schrittweiten $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ und bei ABM3 für die Schrittweite $h = 2^{-3}$ enorm große Fehler ein.

⇒ “Stabilitätsprobleme”

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Die Kombination einer **k -Schritt-AB-Methode** (mit Konsistenz-ordnung k) mit einer **k -Schritt-AM-Methode** (mit Konsistenzordnung $k + 1$), wobei nur **eine Iteration** der Fixpunktiteration im Korrektor berechnet wird, hat folgende Eigenschaften:

- ▶ Die **Konsistenzordnung** ist **$k + 1$** .

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Die Kombination einer k -Schritt-AB-Methode (mit Konsistenz-ordnung k) mit einer k -Schritt-AM-Methode (mit Konsistenzordnung $k + 1$), wobei nur eine Iteration der Fixpunktiteration im Korrektor berechnet wird, hat folgende Eigenschaften:

- ▶ Die Konsistenzordnung ist $k + 1$.
- ▶ Es sind zwei Funktionsauswertungen pro Integrationsschritt erforderlich.

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Die Kombination einer **k -Schritt-AB-Methode** (mit Konsistenzordnung k) mit einer **k -Schritt-AM-Methode** (mit Konsistenzordnung $k + 1$), wobei nur **eine Iteration** der Fixpunktiteration im Korrektor berechnet wird, hat folgende Eigenschaften:

- ▶ Die **Konsistenzordnung ist $k + 1$** .
- ▶ Es sind **zwei Funktionsauswertungen** pro Integrationsschritt erforderlich.
- ▶ Die Methode hat wesentlich **bessere Stabilitätseigenschaften** als die $(k + 1)$ -Schritt-AB-Methode (Beispiel 11.56).

Beispiel 11.58

$$\begin{aligned}y'(t) &= y(t) - 2 \sin t, \quad t \in [0, 4], \\y(0) &= 1,\end{aligned}$$

mit Lösung $y(t) = \sin t + \cos t$. Wir verwenden das **lineare 2-Schrittverfahren**

$$y^{j+2} = -4y^{j+1} + 5y^j + h(4f(t_{j+1}, y^{j+1}) + 2f(t_j, y^j)).$$

Diese Methode hat die **Konsistenzordnung 3**.

Beispiel 11.58

$$\begin{aligned}y'(t) &= y(t) - 2 \sin t, \quad t \in [0, 4], \\y(0) &= 1,\end{aligned}$$

mit Lösung $y(t) = \sin t + \cos t$. Wir verwenden das **lineare 2-Schrittverfahren**

$$y^{j+2} = -4y^{j+1} + 5y^j + h(4f(t_{j+1}, y^{j+1}) + 2f(t_j, y^j)).$$

Diese Methode hat die **Konsistenzordnung 3**.

Resultate:

h	$ y^{1/h} - y(1) $	$ y^{2/h} - y(2) $	$ y^{4/h} - y(4) $
2^{-2}	0.0094	2.87	3.3e+5
2^{-3}	0.286	6.1e+4	2.7e+15
2^{-4}	6.4e+3	5.4e+14	3.7e+36

Konvergenz von LMSV

Unterscheidungsmerkmal

Im Gegensatz zu ESV impliziert die Konsistenz bei k -Schrittverfahren für $k > 1$ noch **nicht** die Konvergenz.

Konvergenz von LMSV

Unterscheidungsmerkmal

Im Gegensatz zu ESV impliziert die Konsistenz bei k -Schrittverfahren für $k > 1$ noch **nicht** die Konvergenz.

Wir definieren für ein gegebenes LMSV das zugehörige ρ -Polynom:

$$\rho(z) = \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} z^{\ell},$$

das dieselben a_{ℓ} -Koeffizienten wie das LMSV hat.

Bei einem linearen ESV: $\rho(z) = z - 1$ ($z_0 = 1$ ist die einzige Nullstelle)

Bei AB- und AM-Verfahren: $\rho(z) = z^k - z^{k-1} = z^{k-1}(z - 1)$
(eine einfache Nullstelle $z_0 = 1$ und eine $(k - 1)$ -fache Nullstelle $z_0 = 0$).

Konvergenz von LMSV

Definition: Nullstabilität

Das LMSV heißt **nullstabil**, falls die sogenannte **Wurzelbedingung** gilt:
Ist $\rho(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$|z_0| \leq 1 ,$$

und darüberhinaus, falls z_0 eine mehrfache Nullstelle ist,

$$|z_0| < 1 .$$

Konvergenz von LMSV

Definition: Nullstabilität

Das LMSV heißt **nullstabil**, falls die sogenannte **Wurzelbedingung** gilt:
Ist $\rho(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$|z_0| \leq 1 ,$$

und darüberhinaus, falls z_0 eine mehrfache Nullstelle ist,

$$|z_0| < 1 .$$

Satz 11.60

Ein konsistentes LMSV ist genau dann **konvergent**, wenn es **nullstabil** ist.
Im Falle von Konvergenz gilt

Konvergenzordnung = Konsistenzordnung.

Konvergenz von LMSV

Bei linearen Mehrschrittverfahren ist die hohe **Konsistenzordnung** $p = 2k$ im Prinzip realisierbar.

Folgendes Resultat von Dahlquist erklärt, weshalb jedoch lineare k -Schrittverfahren mit Konsistenzordnung $p \geq k + 3$ nie verwendet werden.

Satz 11.63 (Dahlquistschrank)

Für jedes lineare **nullstabile** k -Schrittverfahren mit Konsistenzordnung p gilt:

$$\begin{aligned} p &\leq k + 2 && \text{für } k \text{ gerade,} \\ p &\leq k + 1 && \text{für } k \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Diese Schranken sind scharf.

Steife Probleme

Treten auf bei Prozessen mit **stark unterschiedlichen Abklingzeiten**.
Beispiele: Diffusions- und Wärmeleitungsvorgänge oder auch chemische Reaktionen.

Steife Probleme

Treten auf bei Prozessen mit **stark unterschiedlichen Abklingzeiten**.
Beispiele: Diffusions- und Wärmeleitungsvorgänge oder auch chemische Reaktionen.

Beispiel:

$$z' = Az + b, \quad t \in [0, T], \quad z(0) = z^0,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ nicht von t abhängen.

Sei A diagonalisierbar:

$$V^{-1}AV = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Man erhält mit $y = V^{-1}z$, $c = V^{-1}b$ das **entkoppelte** System

$$y' = \Lambda y + c.$$

Steife Probleme

Dieses entkoppelte System

$$y_i' = \lambda_i y_i + c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

hat Lösungen gegeben durch

$$y_i(t) = \hat{c}_i e^{\lambda_i t} - \frac{c_i}{\lambda_i},$$

wobei die Konstante $\hat{c}_i \in \mathbb{R}$ durch die Anfangsbedingung festgelegt wird.

Steife Probleme

Dieses entkoppelte System

$$y_i' = \lambda_i y_i + c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

hat Lösungen gegeben durch

$$y_i(t) = \hat{c}_i e^{\lambda_i t} - \frac{c_i}{\lambda_i},$$

wobei die Konstante $\hat{c}_i \in \mathbb{R}$ durch die Anfangsbedingung festgelegt wird.

Das System bezeichnet man als **steif**, falls die Lösungskomponenten mit **sehr unterschiedlicher Geschwindigkeit abklingen**.

Dies bedeutet für die Eigenwerte

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{und} \quad \max_{k,j} \frac{\operatorname{Re}(\lambda_k)}{\operatorname{Re}(\lambda_j)} \gg 1.$$

Beispiel 11.64

Das Wärmeleitungsproblem aus Beispiel 11.5 ergibt $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, mit

$$\mathbf{A} = -\frac{\kappa}{h_x^2} \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}.$$

Beispiel 11.64

Das Wärmeleitungsproblem aus Beispiel 11.5 ergibt $y' = Ay$, mit

$$A = -\frac{\kappa}{h_x^2} \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)}.$$

Die Eigenwerte λ_j von A lassen sich explizit angeben:

$$\lambda_j = -\frac{4\kappa}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{j\pi}{2n_x}\right), \quad j = 1, 2, \dots, n_x - 1.$$

Daraus folgt, dass $\lambda_j < 0$ und

$$\max_{k,j} \frac{\lambda_k}{\lambda_j} = \frac{\lambda_{n_x-1}}{\lambda_1} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{2n_x}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2n_x}\right)} \approx \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2n_x}\right)^2} = \frac{4}{\pi^2} n_x^2,$$

also ist das System für $n_x \gg 1$ **steif**.

Beispiel 11.65

Wir betrachten den chemischen Reaktionsprozess aus Beispiel 11.4.

Die Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ des Modells $y'(t) = f(y)$ hat für $t = 0$ die Eigenwerte

$$\sigma(f'(y(0))) = \{ 0, -2.1 \cdot 10^4, -7.5 \cdot 10^{-10} \pm i 9.1 \cdot 10^{-4} \},$$

wobei der Eigenwert 0 dreifach vorliegt.

Beispiel 11.65

Wir betrachten den chemischen Reaktionsprozess aus Beispiel 11.4.

Die Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ des Modells $y'(t) = f(y)$ hat für $t = 0$ die Eigenwerte

$$\sigma(f'(y(0))) = \{ 0, -2.1 \cdot 10^4, -7.5 \cdot 10^{-10} \pm i 9.1 \cdot 10^{-4} \},$$

wobei der Eigenwert 0 dreifach vorliegt.

⇒

- die Realteile der drei nicht-Null-Eigenwerte sind negativ
- deren Quotienten können die Größenordnung 10^{14} haben.

Dieses System ist steif.

Stabilitätsfunktion

Wir betrachten das **Testproblem**

$$y' = \lambda y, \quad t \in [0, T], \quad \text{mit } \lambda < 0.$$

Anwendung eines **expliziten Einschrittverfahrens** führt auf eine Rekursion

$$y^{j+1} = g(h\lambda) y^j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

wobei die **Stabilitätsfunktion** g vom Verfahren abhängt:

Stabilitätsfunktion

Wir betrachten das **Testproblem**

$$y' = \lambda y, \quad t \in [0, T], \quad \text{mit } \lambda < 0.$$

Anwendung eines **expliziten Einschrittverfahrens** führt auf eine Rekursion

$$y^{j+1} = g(h\lambda) y^j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

wobei die **Stabilitätsfunktion** g vom Verfahren abhängt:

$g(x) = 1 + x$	Euler-Verfahren,
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$	verb. Euler-Verfahren,
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$	klassisches RK-Verfahren.

Stabilitätsfunktion

$g(x)$ ist eine abgebrochene Potenzreihe von e^x , also ein Polynom.

Beobachtung:

Es gilt $e^x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$, jedoch $p(x) \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow -\infty$, für jedes Polynom p (abgesehen vom Nullpolynom).

Daher lässt sich die Funktion e^x , $x < 0$ nur für kleine Argumente $|x|$ durch ein Polynom approximieren.

Stabilitätsfunktion

$g(x)$ ist eine abgebrochene Potenzreihe von e^x , also ein Polynom.

Beobachtung:

Es gilt $e^x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$, jedoch $p(x) \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow -\infty$, für jedes Polynom p (abgesehen vom Nullpolynom).

Daher lässt sich die Funktion e^x , $x < 0$ nur für kleine Argumente $|x|$ durch ein Polynom approximieren.

Explizite Verfahren für steife Probleme

Explizite ESV sind zur Behandlung steifer Probleme ungeeignet.
Diese Aussage gilt ebenso für explizite Mehrschrittverfahren.

Beispiel 11.67

Das implizite Euler-Verfahren

$$y^{j+1} = y^j + hf(t_{j+1}, y^{j+1}),$$

angewandt auf $y' = \lambda y$, ergibt

$$y^{j+1} = y^j + h\lambda y^{j+1},$$

also

$$y^{j+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y^j, \quad g(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Beispiel 11.67

Das implizite Euler-Verfahren

$$y^{j+1} = y^j + hf(t_{j+1}, y^{j+1}),$$

angewandt auf $y' = \lambda y$, ergibt

$$y^{j+1} = y^j + h\lambda y^{j+1},$$

also

$$y^{j+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y^j, \quad g(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Die Trapez-Methode

$$y^{j+1} = y^j + \frac{h}{2} \left(f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1}) \right),$$

ergibt

$$y^{j+1} = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} y^j, \quad g(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}.$$

Stabilitätsintervalle

Allgemein ergibt sich bei **Einschrittverfahren**, angewandt $y' = \lambda y$:

$$y^{j+1} = g(h\lambda)y^j,$$

wobei $g(x)$ die **Stabilitätsfunktion des Verfahrens** ist.

Stabilitätsintervall ESV

Gegeben sei ein ESV mit zugehöriger Stabilitätsfunktion g .
Das Intervall $I = (-a, 0)$ mit maximalem $a > 0$, so dass

$$x \in I \implies |g(x)| < 1$$

gilt, heißt das **Stabilitätsintervall** des Verfahrens.

Stabilitätsintervalle

Allgemein ergibt sich bei **Einschrittverfahren**, angewandt $y' = \lambda y$:

$$y^{j+1} = g(h\lambda)y^j,$$

wobei $g(x)$ die **Stabilitätsfunktion des Verfahrens** ist.

Stabilitätsintervall ESV

Gegeben sei ein ESV mit zugehöriger Stabilitätsfunktion g .
Das Intervall $I = (-a, 0)$ mit maximalem $a > 0$, so dass

$$x \in I \implies |g(x)| < 1$$

gilt, heißt das **Stabilitätsintervall** des Verfahrens.

Die Größe dieses Intervalls ist ein Maß für die Stabilität des Verfahrens bei Anwendung auf steife Systeme.

Das Stabilitätsintervall soll möglichst groß sein.

Stabilitätsintervall bei LMSV

Bei linearen **Mehr**schrittverfahren ist die Charakterisierung des Stabilitätsintervalls komplizierter als bei ESV.

Grundidee anhand des Beispiels des Adams-Bashforth-Verfahrens ($k = 2$):

$$y^{j+2} = y^{j+1} + h \left(\frac{3}{2} f(t_{j+1}, y^{j+1}) - \frac{1}{2} f(t_j, y_j) \right).$$

Stabilitätsintervall bei LMSV

Bei linearen **Mehrschrittverfahren** ist die Charakterisierung des Stabilitätsintervalls komplizierter als bei ESV.

Grundidee anhand des Beispiels des Adams-Bashforth-Verfahrens ($k = 2$):

$$y^{j+2} = y^{j+1} + h \left(\frac{3}{2} f(t_{j+1}, y^{j+1}) - \frac{1}{2} f(t_j, y_j) \right).$$

Anwendung auf $y' = \lambda y$ ergibt

$$y^{j+2} - y^{j+1} - h \left(\frac{3}{2} \lambda y^{j+1} - \frac{1}{2} \lambda y^j \right) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Die allgemeine Lösung dieser **Differenzengleichung** bestimmt man mit dem Potenzansatz $y^j = (z)^j$ für ein $z \in \mathbb{R}$.

Stabilitätsintervall bei LMSV

Bei linearen **Mehrschrittverfahren** ist die Charakterisierung des Stabilitätsintervalls komplizierter als bei ESV.

Grundidee anhand des Beispiels des Adams-Bashforth-Verfahrens ($k = 2$):

$$y^{j+2} = y^{j+1} + h \left(\frac{3}{2} f(t_{j+1}, y^{j+1}) - \frac{1}{2} f(t_j, y_j) \right).$$

Anwendung auf $y' = \lambda y$ ergibt

$$y^{j+2} - y^{j+1} - h \left(\frac{3}{2} \lambda y^{j+1} - \frac{1}{2} \lambda y^j \right) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Die allgemeine Lösung dieser **Differenzgleichung** bestimmt man mit dem Potenzansatz $y^j = (z)^j$ für ein $z \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung ist

$$y^j = \alpha (z_1)^j + \beta (z_2)^j$$

mit z_1, z_2 die **Nullstellen der charakteristischen Gleichung**

$$z^2 - \left(1 + \frac{3}{2} h \lambda\right) z + \frac{1}{2} h \lambda = 0.$$

Stabilitätsintervall bei AB2

Um das Abklingverhalten der exakten Lösung $y(t) = ce^{\lambda t}$ ($\lambda < 0$) überhaupt wiedergeben zu können, fordern wir

$$|z_i| < 1 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Beachte: die Nullstellen z_1, z_2 hängen von dem Wert $h\lambda =: x$ ab.

Stabilitätsintervall bei AB2

Um das Abklingverhalten der exakten Lösung $y(t) = ce^{\lambda t}$ ($\lambda < 0$) überhaupt wiedergeben zu können, fordern wir

$$|z_i| < 1 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Beachte: die Nullstellen z_1, z_2 hängen von dem Wert $h\lambda =: x$ ab.

Stabilitätsintervall AB2

Es seien $z_1(x), z_2(x)$ die Nullstellen der Gleichung

$$z^2 - \left(1 + \frac{3}{2}x\right)z + \frac{1}{2}x = 0.$$

Das Intervall $I = (-a, 0)$ mit maximalem $a > 0$, so dass

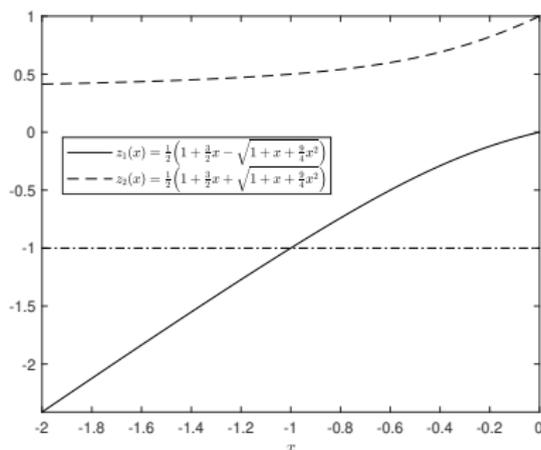
$$x \in I \quad \implies \quad |z_i(x)| < 1, \quad i = 1, 2$$

gilt, heißt das **Stabilitätsintervall** des AB2-Verfahrens.

Stabilitätsintervall bei AB2

Die zwei Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind

$$z_{1,2}(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}x \pm \sqrt{1 + x + \frac{9}{4}x^2} \right)$$



Hieraus schließt man: **das Stabilitätsintervall ist $I = (-1, 0)$.**

Stabilitätsintervalle

Verfahren	Stabilitätsintervall
Euler-Verfahren	$(-2, 0)$
Verb. Euler-Verfahren	$(-2, 0)$
klassisches RK-Verfahren	$(-2.78, 0)$
2-Schritt-Adams-Bashforth	$(-1, 0)$
3-Schritt-Adams-Bashforth	$(-0.55, 0)$
4-Schritt-Adams-Bashforth	$(-0.3, 0)$
2-Schritt-Adams-Moulton	$(-6.0, 0)$
3-Schritt-Adams-Moulton	$(-3.0, 0)$
Implizites Euler-Verfahren	$(-\infty, 0)$
Trapezmethode	$(-\infty, 0)$
RK-Gauß-Verfahren	$(-\infty, 0)$

Stabilitätsgebiete: A -Stabilität

Im Allgemeinen werden nicht nur **reelle** Eigenwerte vorkommen. Man kann auch Lösungskomponenten der Form $e^{\lambda t}$ antreffen, wobei λ **komplex** ist.

Stabilitätsgebiete: A -Stabilität

Im Allgemeinen werden nicht nur **reelle** Eigenwerte vorkommen. Man kann auch Lösungskomponenten der Form $e^{\lambda t}$ antreffen, wobei λ **komplex** ist.

Deshalb müssen bei der Stabilitätsanalyse von ESV oder LMSV im Allgemeinen nicht nur Stabilitätsintervalle, sondern sogar **Stabilitätsgebiete** in der **komplexen Ebene** bestimmt werden.

Stabilitätsgebiete: A -Stabilität

Im Allgemeinen werden nicht nur **reelle** Eigenwerte vorkommen. Man kann auch Lösungskomponenten der Form $e^{\lambda t}$ antreffen, wobei λ **komplex** ist.

Deshalb müssen bei der Stabilitätsanalyse von ESV oder LMSV im Allgemeinen nicht nur Stabilitätsintervalle, sondern sogar **Stabilitätsgebiete** in der **komplexen Ebene** bestimmt werden.

Man lässt im Modellproblem $y' = \lambda y$

$$\lambda \in \mathbb{C}^- := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \}$$

zu.

Stabilitätsgebiet bei ESV

Stabilitätsgebiet bei ESV

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{C}^- \mid |g(x)| < 1\}$$

wird als ein Maß für die Stabilität der Methode verwendet.

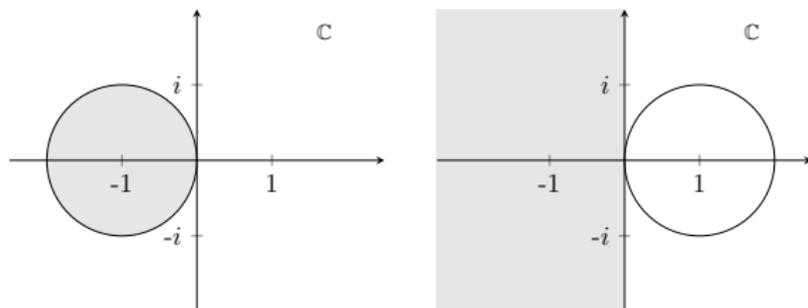
Stabilitätsgebiet bei ESV

Stabilitätsgebiet bei ESV

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{C}^- \mid |g(x)| < 1\}$$

wird als ein Maß für die Stabilität der Methode verwendet.

Stabilitätsgebiete für das **explizite** Euler-Verfahren ($g(x) = 1 + x$),
und für das **implizite** Euler-Verfahren ($g(x) = \frac{1}{1-x}$).



Stabilitätsgebiet AB2

Für das AB2-Mehrschrittverfahren lässt sich das Stabilitätsintervall auf das Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}^- \mid |z_i(x)| < 1 \text{ für } i = 1, 2\}$$

verallgemeinern.

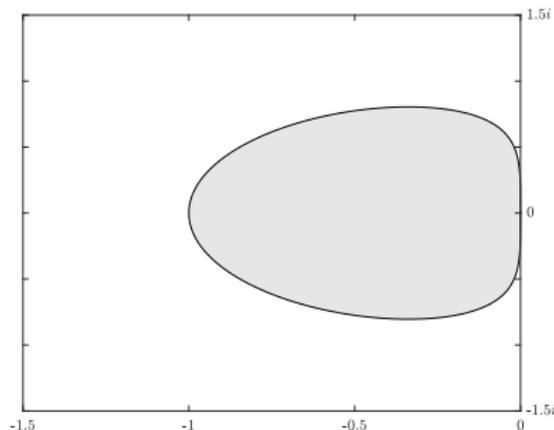
Stabilitätsgebiet AB2

Für das AB2-Mehrschrittverfahren lässt sich das Stabilitätsintervall auf das Stabilitätsgebiet

$$S = \{x \in \mathbb{C}^- \mid |z_i(x)| < 1 \text{ für } i = 1, 2\}$$

verallgemeinern.

Dieses Stabilitätsgebiet wird hierunter gezeigt:



A-Stabilität

A-Stabilität

Das numerische Verfahren ist **A**-stabil, wenn das Stabilitätsgebiet S die gesamte linke komplexe Halbebene ist:

$$S = \mathbb{C}^-$$

- ▶ Explizite Ein- oder Mehrschrittverfahren sind niemals **A**-stabil.

A-Stabilität

A-Stabilität

Das numerische Verfahren ist **A**-stabil, wenn das Stabilitätsgebiet S die gesamte linke komplexe Halbebene ist:

$$S = \mathbb{C}^-$$

- ▶ Explizite Ein- oder Mehrschrittverfahren sind niemals **A**-stabil.
- ▶ Das implizite Euler-Verfahren und die Trapez-Methode sind **A**-stabil.

A-Stabilität

A-Stabilität

Das numerische Verfahren ist **A**-stabil, wenn das Stabilitätsgebiet S die gesamte linke komplexe Halbebene ist:

$$S = \mathbb{C}^-$$

- ▶ Explizite Ein- oder Mehrschrittverfahren sind niemals **A**-stabil.
- ▶ Das implizite Euler-Verfahren und die Trapez-Methode sind **A**-stabil.
- ▶ Die RK-Gauß-Verfahren sind **A**-stabil.

A-Stabilität

A-Stabilität

Das numerische Verfahren ist A -stabil, wenn das Stabilitätsgebiet S die gesamte linke komplexe Halbebene ist:

$$S = \mathbb{C}^-$$

- ▶ Explizite Ein- oder Mehrschrittverfahren sind niemals A -stabil.
- ▶ Das implizite Euler-Verfahren und die Trapez-Methode sind A -stabil.
- ▶ Die RK-Gauß-Verfahren sind A -stabil.
- ▶ Für LMSV ist die Forderung der A -Stabilität sehr einschränkend:
 2. **Dahlquistsschranke:** Ein A -stabiles lineares Mehrschrittverfahren hat höchstens die Konsistenzordnung $p = 2$.

$A(\alpha)$ -Stabilität

Man nennt ein Verfahren $A(\alpha)$ -stabil, (mit $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$) wenn das Stabilitätsgebiet S einen um die reelle Achse symmetrischen Sektor der linken komplexen Halbebene mit Innenwinkel 2α am Ursprung einschließt:

$$\{x \in \mathbb{C}^- \mid |\arg(x) - \pi| < \alpha\} \subset S$$

$A(\alpha)$ -Stabilität

Man nennt ein Verfahren $A(\alpha)$ -stabil, (mit $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$) wenn das Stabilitätsgebiet S einen um die reelle Achse symmetrischen Sektor der linken komplexen Halbebene mit Innenwinkel 2α am Ursprung einschließt:

$$\{x \in \mathbb{C}^- \mid |\arg(x) - \pi| < \alpha\} \subset S$$

- ▶ A -Stabilität stimmt mit $A(\frac{\pi}{2})$ -Stabilität überein.

$A(\alpha)$ -Stabilität

Man nennt ein Verfahren $A(\alpha)$ -stabil, (mit $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$) wenn das Stabilitätsgebiet S einen um die reelle Achse symmetrischen Sektor der linken komplexen Halbebene mit Innenwinkel 2α am Ursprung einschließt:

$$\{x \in \mathbb{C}^- \mid |\arg(x) - \pi| < \alpha\} \subset S$$

- ▶ A -Stabilität stimmt mit $A(\frac{\pi}{2})$ -Stabilität überein.
- ▶ Selbst für Winkel α , die nahe an $\pi/2$ sind, kann man $A(\alpha)$ -stabile LMSV beliebig hoher Ordnung finden.

Rückwärtsdifferenzenmethoden

Diese Verfahren werden auch **BDF-Methoden** (backward differentiation formula) genannt.

k-Schritt-BDF-Methode

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$,
Koeffizienten a_ℓ ($0 \leq \ell \leq k$), Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} .
Berechne für $j = 0, 1, \dots, n - k$:

$$\sum_{\ell=0}^k a_\ell y^{j+\ell} = h f(t_{j+k}, y^{j+k}) .$$

Die BDF-Verfahren sind **implizit**.

Rückwärtsdifferenzenmethoden

Konstruktionsprinzip basiert auf Interpolationsformeln.

Es sei $p_k \in \Pi_k$ das Lagrange-Interpolationspolynom, das die Werte

$$(t_j, y^j), (t_{j+1}, y^{j+1}), \dots, (t_{j+k}, y^{j+k}),$$

interpoliert, also

$$p_k(t) = P(y|t_j, \dots, t_{j+k})(t) = \sum_{m=0}^k y^{j+m} \ell_{m,k}(t).$$

Die k -Schritt-BDF-Methode wird über den Ansatz

$$p'_k(t_{j+k}) = f(t_{j+k}, y^{j+k})$$

hergeleitet.

Beispiel 11.70

Das Interpolationspolynom für $k = 2$ ist

$$p_2(t) = y^j \frac{(t - t_{j+1})(t - t_{j+2})}{2h^2} + y^{j+1} \frac{(t - t_j)(t - t_{j+2})}{-h^2} \\ + y^{j+2} \frac{(t - t_j)(t - t_{j+1})}{2h^2}$$

Beispiel 11.70

Das Interpolationspolynom für $k = 2$ ist

$$p_2(t) = y^j \frac{(t - t_{j+1})(t - t_{j+2})}{2h^2} + y^{j+1} \frac{(t - t_j)(t - t_{j+2})}{-h^2} \\ + y^{j+2} \frac{(t - t_j)(t - t_{j+1})}{2h^2}$$

Wegen

$$p_2'(t_{j+2}) = \left(\frac{1}{2}y^j - 2y^{j+1} + \frac{3}{2}y^{j+2} \right) / h$$

ergibt sich die BDF2 Methode

$$\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hf(t_{j+2}, y^{j+2})$$

Rückwärtsdifferenzenmethoden

Methode	Ordnung	$A(\alpha)$ -Stabilität
impl. Euler-Verf.: $y^{j+1} - y^j = hf(t_{j+1}, y^{j+1})$	1	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF2: $\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hf(t_{j+2}, y^{j+2})$	2	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF3: $\frac{11}{6}y^{j+3} - 3y^{j+2} + \frac{3}{2}y^{j+1} - \frac{1}{3}y^j = hf(t_{j+3}, y^{j+3})$	3	$\alpha = 0.96 \cdot \frac{\pi}{2}$
BDF4: $\frac{25}{12}y^{j+4} - 4y^{j+3} + 3y^{j+2} - \frac{4}{3}y^{j+1} + \frac{1}{4}y^j = hf(t_{j+4}, y^{j+4})$	4	$\alpha = 0.82 \cdot \frac{\pi}{2}$

Rückwärtsdifferenzenmethoden

Methode	Ordnung	$A(\alpha)$ -Stabilität
impl. Euler-Verf.: $y^{j+1} - y^j = hf(t_{j+1}, y^{j+1})$	1	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF2: $\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hf(t_{j+2}, y^{j+2})$	2	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF3: $\frac{11}{6}y^{j+3} - 3y^{j+2} + \frac{3}{2}y^{j+1} - \frac{1}{3}y^j = hf(t_{j+3}, y^{j+3})$	3	$\alpha = 0.96 \cdot \frac{\pi}{2}$
BDF4: $\frac{25}{12}y^{j+4} - 4y^{j+3} + 3y^{j+2} - \frac{4}{3}y^{j+1} + \frac{1}{4}y^j = hf(t_{j+4}, y^{j+4})$	4	$\alpha = 0.82 \cdot \frac{\pi}{2}$

► **A-stabil** für $k = 1, 2$.

Rückwärtsdifferenzenmethoden

Methode	Ordnung	$A(\alpha)$ -Stabilität
impl. Euler-Verf.: $y^{j+1} - y^j = hf(t_{j+1}, y^{j+1})$	1	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF2: $\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hf(t_{j+2}, y^{j+2})$	2	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF3: $\frac{11}{6}y^{j+3} - 3y^{j+2} + \frac{3}{2}y^{j+1} - \frac{1}{3}y^j = hf(t_{j+3}, y^{j+3})$	3	$\alpha = 0.96 \cdot \frac{\pi}{2}$
BDF4: $\frac{25}{12}y^{j+4} - 4y^{j+3} + 3y^{j+2} - \frac{4}{3}y^{j+1} + \frac{1}{4}y^j = hf(t_{j+4}, y^{j+4})$	4	$\alpha = 0.82 \cdot \frac{\pi}{2}$

- ▶ **A-stabil** für $k = 1, 2$.
- ▶ Für $k = 3, 4, 5, 6$ enthalten sie immer noch das maximale Stabilitätsintervall $(-\infty, 0)$, verlieren allerdings zunehmend an Stabilität in der Nähe der imaginären Achse.

Rückwärtsdifferenzenmethoden

Methode	Ordnung	$A(\alpha)$ -Stabilität
impl. Euler-Verf.: $y^{j+1} - y^j = hf(t_{j+1}, y^{j+1})$	1	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF2: $\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hf(t_{j+2}, y^{j+2})$	2	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF3: $\frac{11}{6}y^{j+3} - 3y^{j+2} + \frac{3}{2}y^{j+1} - \frac{1}{3}y^j = hf(t_{j+3}, y^{j+3})$	3	$\alpha = 0.96 \cdot \frac{\pi}{2}$
BDF4: $\frac{25}{12}y^{j+4} - 4y^{j+3} + 3y^{j+2} - \frac{4}{3}y^{j+1} + \frac{1}{4}y^j = hf(t_{j+4}, y^{j+4})$	4	$\alpha = 0.82 \cdot \frac{\pi}{2}$

- ▶ **A-stabil** für $k = 1, 2$.
- ▶ Für $k = 3, 4, 5, 6$ enthalten sie immer noch das maximale Stabilitätsintervall $(-\infty, 0)$, verlieren allerdings zunehmend an Stabilität in der Nähe der imaginären Achse.
- ▶ BDF- k -Schrittverfahren mit $k \geq 7$ werden **nie verwendet**, weil diese **nicht nullstabil** und deshalb nicht konvergent sind.

Beispiel 11.71

Wir betrachten das diskrete Wärmeleitungsproblem $y' = Ay$ aus Beispiel 11.5 mit $\kappa = 1$, $\ell = 1$, Anfangswert $\Phi(x) = \sin(\pi x)$ und Schrittweite $h_x = \frac{1}{60}$.

Für die extremen Eigenwerte der Matrix A gilt

$$\lambda_1 = -9.87, \quad \lambda_{n_x-1} = -14390.$$

Das System ist offensichtlich **sehr steif**.

Beispiel 11.71

Wir betrachten das diskrete Wärmeleitungsproblem $y' = Ay$ aus Beispiel 11.5 mit $\kappa = 1$, $\ell = 1$, Anfangswert $\Phi(x) = \sin(\pi x)$ und Schrittweite $h_x = \frac{1}{60}$.

Für die extremen Eigenwerte der Matrix A gilt

$$\lambda_1 = -9.87, \quad \lambda_{n_x-1} = -14390.$$

Das System ist offensichtlich **sehr steif**.

Wir verwenden das **BDF2-Verfahren** mit $h = h_x = \frac{1}{60}$:

$$\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hAy^{j+2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel 11.71

Wir betrachten das diskrete Wärmeleitungsproblem $y' = Ay$ aus Beispiel 11.5 mit $\kappa = 1$, $\ell = 1$, Anfangswert $\Phi(x) = \sin(\pi x)$ und Schrittweite $h_x = \frac{1}{60}$.

Für die extremen Eigenwerte der Matrix A gilt

$$\lambda_1 = -9.87, \quad \lambda_{n_x-1} = -14390.$$

Das System ist offensichtlich **sehr steif**.

Wir verwenden das **BDF2-Verfahren** mit $h = h_x = \frac{1}{60}$:

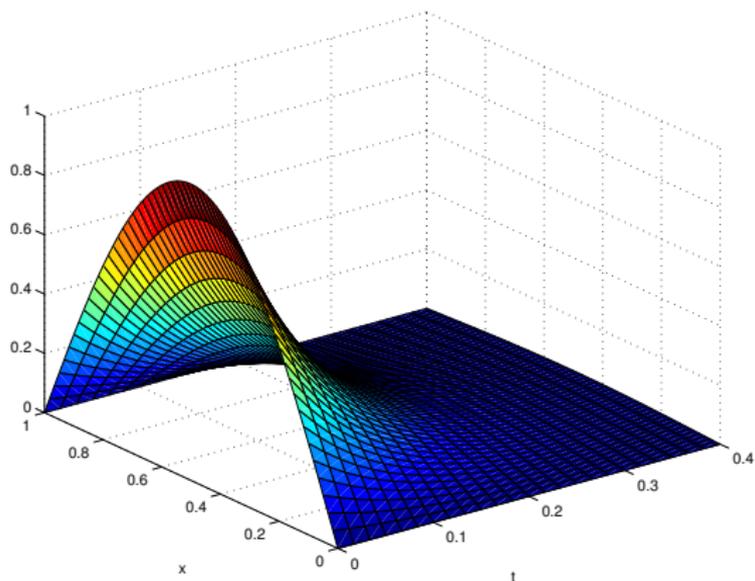
$$\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hAy^{j+2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Zum Vergleich auch das **verbesserte Euler-Verfahren**.

Dieses Verfahren ist erst stabil, wenn $|h\lambda_{n_x-1}(A)| < 2$. d.h., $h < 1.39 \cdot 10^{-4}$, gilt.

Beispiel 11.71

Numerische Lösung mit dem BDF2-Verfahren und Zeitschrittweite $\frac{1}{60}$



Beispiel 11.71

Numerische Lösung mit dem verbesserten Euler-Verfahren und Zeitschrittweite $h = 1.38 \cdot 10^{-4}$ (links) und $h = 1.40 \cdot 10^{-4}$ (rechts).

