Kapitel 3

Buch Dahmen-Reusken

RWTH Aachen University

2022

Motivation

Problemstellungen (Auswahl)

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen.

Motivation

Problemstellungen (Auswahl)

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen.
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (Normalgleichungen, siehe nächstes Kapitel).

Motivation

Problemstellungen (Auswahl)

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen.
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (Normalgleichungen, siehe nächstes Kapitel).
- Zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems werden oft Linearisierungsverfahren, wie z.B. das Newton-Verfahren, eingesetzt. Bei so einem Verfahren ergibt sich eine Reihe von linearen Gleichungssystemen (siehe übernächstes Kapitel).

Motivation

Problemstellungen (Auswahl)

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen.
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (Normalgleichungen, siehe nächstes Kapitel).
- Zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems werden oft Linearisierungsverfahren, wie z.B. das Newton-Verfahren, eingesetzt. Bei so einem Verfahren ergibt sich eine Reihe von linearen Gleichungssystemen (siehe übernächstes Kapitel).

Wahl des Lösungsverfahrens hängt vom Problem ab

- dünnbesetztes vs. vollbesetztes Gleichungssystem
- Strukur (Tridiagonal-, Bandmatrizen)

Beispiel 3.6

Gesucht $u(x)$, das eine Differentialgleichung vom Typ

$$-u''(x) + \lambda(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllt (Randwertaufgabe).

Beispiel 3.6

Gesucht $u(x)$, das eine Differentialgleichung vom Typ

$$-u''(x) + \lambda(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1],$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllt (Randwertaufgabe).

Diskretisierung (Gitterpunkte)

$$x_j = jh, \quad j = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n},$$

Beispiel 3.6

Ableitung $\rightarrow$ Differenzenquotienten (Taylorentwicklung)

$$u(x_j + h) = u(x_j) + hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) + \frac{h^3}{6}u'''(x_j) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$u(x_j - h) = u(x_j) - hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) - \frac{h^3}{6}u'''(x_j) + \mathcal{O}(h^4),$$

Daraus folgt sofort

$$u(x_j + h) - 2u(x_j) + u(x_j - h) = h^2u''(x_j) + \mathcal{O}(h^4),$$

Beispiel 3.6

Es gilt also

$$u(x_j + h) - 2u(x_j) + u(x_j - h) = h^2 u''(x_j) + \mathcal{O}(h^4),$$

und somit

$$u''(x_j) = \frac{1}{h^2}\left[u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})\right] + \mathcal{O}(h^2).$$

D.h., bis auf Terme 2. Ordnung in der Schrittweite h entspricht die 2. Ableitung einem **Differenzenquotienten**.

Beispiel 3.6

Diskretisierung:

$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \lambda(x_j)u_j = f(x_j), \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

zusammen mit den Randbedingungen $u_0 = u_n = 0$.

Für kleines h, also großes n:

$$u_j \approx u(x_j).$$

Beispiel 3.6

Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_{2,2} & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$a_{i,i} := 2 + h^2 \lambda(x_i)$$
$$f_i := h^2 f(x_i)$$

Beispiel 3.7

Gesucht $u(x)$, das die Integralgleichung

$$u(x) + 2\int_0^1 \cos(xt)u(t)dt = 2, \quad x \in [0,1]$$

erfüllt.

Beispiel 3.7

Gesucht $u(x)$, das die Integralgleichung

$$u(x) + 2\int_0^1 \cos(xt)u(t)dt = 2, \quad x \in [0,1]$$

erfüllt.

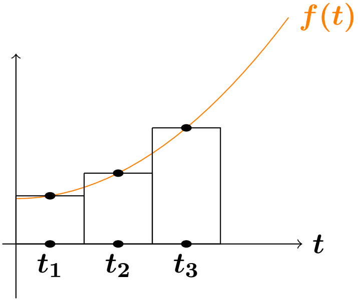
Diskretisierung (Gitterpunkte)

$$t_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)h, \quad j = 1,\ldots,n, \quad h = \frac{1}{n}.$$

Beispiel 3.7

Annäherung des Integrals (Mittelpunktsregel):

$$\int_0^1 f(t)dt \approx h \sum_{j=1}^{n} f(t_j)$$



Beispiel 3.7

Gleichung nur in den Punkten $x = t_i$ betrachten.

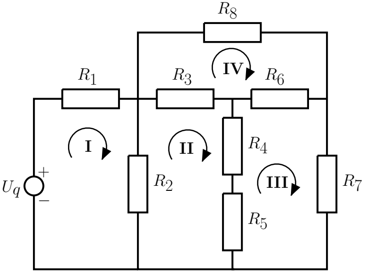
Gleichungssystem für $u_i \approx u(t_i)$:

$$u_i + 2h \sum_{j=1}^{n} \cos(t_i t_j) u_j = 2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

In Matrixform ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2h} + \cos(t_1 t_1) & \cos(t_1 t_2) & \cdots & \cos(t_1 t_n) \\ \cos(t_2 t_1) & \frac{1}{2h} + \cos(t_2 t_2) & & \cos(t_2 t_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cos(t_1 t_n) & \cdots & & \frac{1}{2h} + \cos(t_n t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Netzwerkanalyse



Kirchhoffsche Gesetze:

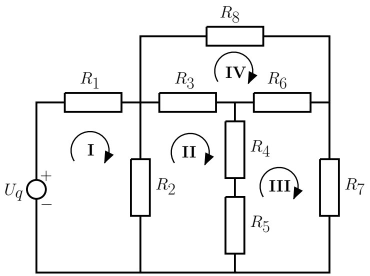
1. "Maschenregel"

$$\sum_k U_k = 0$$

2. "Knotenregel"

$$\sum_k I_k = 0$$

$$\begin{aligned}
R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) &= U_q \\
R_2(I_2 - I_1) + R_3(I_2 - I_4) + (R_4 + R_5)(I_2 - I_3) &= 0 \\
(R_4 + R_5)(I_3 - I_2) + R_6(I_3 - I_4) + R_7 I_3 &= 0 \\
R_3(I_4 - I_2) + R_8 I_4 + R_6(I_4 - I_3) &= 0
\end{aligned}$$



Kirchhoffsche Gesetze:

1. "Maschenregel"
$$\sum_k U_k = 0$$
2. "Knotenregel"
$$\sum_k I_k = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4+R_5 & -R_4-R_5 & -R_3 \\ 0 & -R_4-R_5 & R_4+R_5+R_6+R_7 & -R_6 \\ 0 & -R_3 & -R_6 & R_3+R_6+R_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Lineares Gleichungssystem: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
- Hier Sonderfall: $\boldsymbol{A}$ symmetrisch, d.h. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$
  (tritt häufig bei Modellierung physikalischer Systeme auf!)

Problemstellung

Notation:

$\mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Menge der $(m \times n)$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit Einträgen

$$a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Problemstellung

Aufgabe

Zu gegebenem $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ bestimme ein

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

so dass

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}\,x_n & = & b_n \end{array}$$

bzw. kurz

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

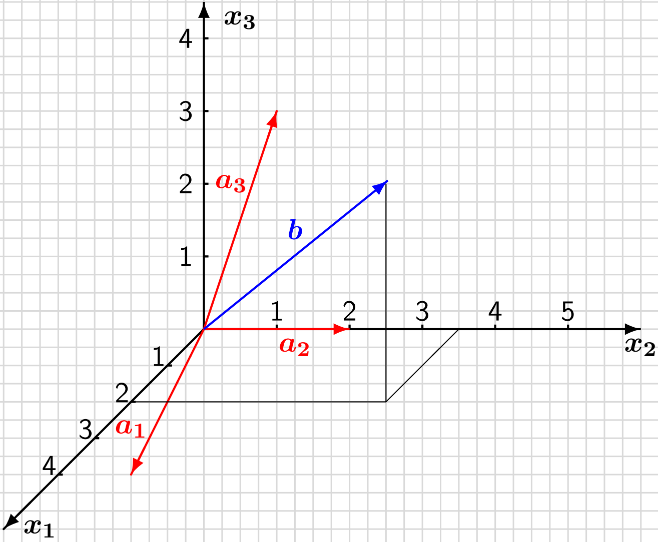
erfüllt.

Geometrische Interpretation $Ax = b$ $(n = 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

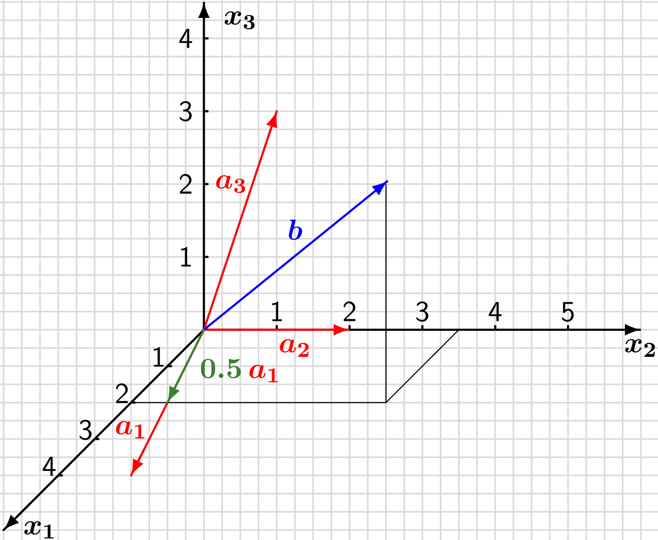


Geometrische Interpretation $Ax = b$ $(n = 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

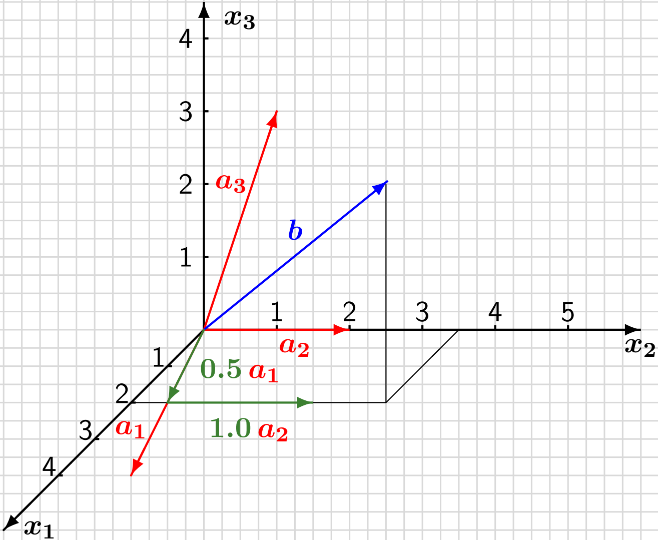


Geometrische Interpretation $Ax = b$ $(n = 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ ? \end{bmatrix}$$

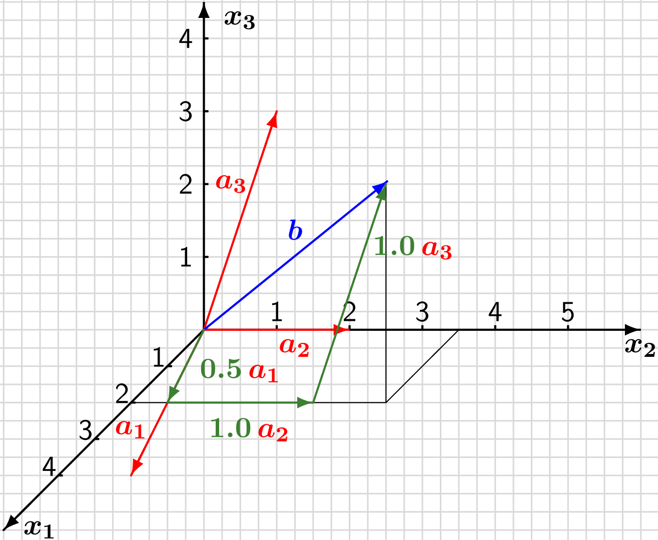


Geometrische Interpretation $\boldsymbol{Ax = b}$ $(\boldsymbol{n = 3})$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$



Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$:

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
- Es gilt $\mathbf{det}\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

Bemerkung 3.1

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
- Es gilt $\mathbf{det}\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$.

$\boldsymbol{A}$ heißt regulär oder nichtsingulär, wenn $\mathbf{det}\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$.

Annahme: Wir nehmen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme stets an, dass $\mathbf{det}\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ gilt.

Störung in der rechten Seite $\boldsymbol{b}$

Satz 3.10

Seien $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}$. Dann gilt:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \underbrace{\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \, \|\boldsymbol{A}\|}_{\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})} \, \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

wobei

$$\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \, \|\boldsymbol{A}\|$$

die (relative) Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}$ (bzgl. $\|\cdot\|$) ist.

Störung in der rechten Seite $\boldsymbol{b}$

Satz 3.10

Seien $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}$. Dann gilt:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \underbrace{\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \, \|\boldsymbol{A}\|}_{\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})} \, \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

wobei

$$\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \, \|\boldsymbol{A}\|$$

die (relative) Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}$ (bzgl. $\|\cdot\|$) ist.

Der relative Fehler der Lösung läßt sich durch das Vielfache

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$$

des relativen Fehlers der rechten Seite (Eingabedaten) abschätzen.

Störung in $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$

Satz 3.12

Sie $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\Delta A})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\Delta b}.$$

Falls $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ und

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}<\boldsymbol{1}$$

gilt, folgt für den relativen Fehler

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\leq\frac{\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}\left(\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}+\frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\right).$$

Störung in $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$

Beachte

Falls

$$\boldsymbol{\kappa}(A)\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\Delta A}\| \ll \mathbf{1},$$

beschreibt die Konditionszahl $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})$ auch maßgeblich den Effekt der Störungen in den übrigen Eingabedaten.

Beispiel 3.14

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1.001} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.999} \\ \mathbf{4.003} \end{pmatrix},$$

sowie die gestörten Daten

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2.002} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe: Schätzen Sie den relativen Fehler in der Lösung ab.

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow \ \kappa_\infty(A) = 4798.2.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600,\ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow\ \kappa_\infty(A) = 4798.2.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}$$

und damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\|A^{-1}\|_\infty = 600,\ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow\ \kappa_\infty(A) = 4798.2}.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow \ \kappa_\infty(A) = 4798.2.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,$$

$$\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}$$

und damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow \ \kappa_\infty(A) = 4798.2}.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

$$\boldsymbol{\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = 0.003.}$$

Beispiel 3.14

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}$$

und damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\|A^{-1}\|_\infty = 600,\ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow\ \kappa_\infty(A) = 4798.2}.$$

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

$$\boldsymbol{\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = 0.003.}$$

3. Schritt: Aus Satz 3.12 ergibt sich

$$\boldsymbol{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 10.49.}$$

Beispiel 3.14

Mit

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b},$$

sowie

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2229 \\ 1.3333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

ergibt sich der tatsächliche relative Fehler

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \approx \mathbf{2.333}$$

gebenüber dem geschätzten Wert von $\mathbf{10.49}$.

Bemerkung

In einer Maschine mit Maschinengenauigkeit eps:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \leq \mathrm{eps} \quad \text{und} \quad \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \mathrm{eps}.$$

Bemerkung

In einer Maschine mit Maschinengenauigkeit eps:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \leq \mathrm{eps} \quad \text{und} \quad \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \mathrm{eps}.$$

Nach Satz 3.12 ist wegen der Kondition des Problems

$$\underbrace{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})}_{\text{Eingabe}} \to \underbrace{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}}_{\text{Ausgabe}}$$

der unvermeidliche Fehler durch

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \mathcal{O}(\kappa(A)\,\mathrm{eps})$$

gegeben.

Residuum als Maß für Genauigkeit

Gegeben:

- Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
- Näherungslösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Definition

Das Residuum $\tilde{\boldsymbol{r}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{r}} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Beachte

- Residuum ist ohne Kenntnis der Lösung $\boldsymbol{x}$ berechenbar
- $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

Residuum als Maß für Genauigkeit

Frage

Wie aussagekräftig ist die Größe des Residuums in Bezug auf den tatsächlichen Fehler?

Residuum als Maß für Genauigkeit

Frage

Wie aussagekräftig ist die Größe des Residuums in Bezug auf den tatsächlichen Fehler?

Für die Norm des Residuums im Vergleich zu der des Fehlers gilt:

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})^{-1}\frac{\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

$\Rightarrow$ hängt wieder von der Konditionszahl ab.

Beachte

Die Größe des Residuums $\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|$ kann ein schlechtes Maß für den Fehler sein, falls die Konditionszahl $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})$ groß ist.

Beispiel 3.15

Sei $\boldsymbol{b} = (3,6)^T$ und $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}$ ($\kappa_\infty(A) = 4798.2$).

Exakte Lösung: $\boldsymbol{x} = (1,0)^T$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0.99684 \\ 0.00949 \end{pmatrix}, \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} 1.000045 \\ 0.000089 \end{pmatrix},$$

gilt

Beispiel 3.15

Sei $\boldsymbol{b} = (3,6)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}$ $(\kappa_\infty(A) = 4798.2)$.
Exakte Lösung: $\boldsymbol{x} = (1,0)^T$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0.99684 \\ 0.00949 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1.000045 \\ 0.000089 \end{pmatrix},$$

gilt

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 1.95 \cdot 10^{-5},$$
$$\|\hat{\boldsymbol{r}}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 4.48 \cdot 10^{-4}.$$

Die Norm des Residuums für $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist also viel kleiner als für $\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty \ll \|\hat{\boldsymbol{r}}\|_\infty.$$

Beispiel 3.15

Sei $\boldsymbol{b} = (3, 6)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}$ ($\kappa_\infty(A) = 4798.2$).

Exakte Lösung: $x = (1, 0)^T$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0.99684 \\ 0.00949 \end{pmatrix}, \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} 1.000045 \\ 0.000089 \end{pmatrix},$$

gilt

$$\|\tilde{r}\|_\infty = \|b - A\tilde{x}\|_\infty = 1.95 \cdot 10^{-5},$$
$$\|\hat{r}\|_\infty = \|b - A\hat{x}\|_\infty = 4.48 \cdot 10^{-4}.$$

Die Norm des Residuums für $\tilde{x}$ ist also viel kleiner als für $\hat{x}$:

$$\|\tilde{r}\|_\infty \ll \|\hat{r}\|_\infty.$$

Der Fehler in $\tilde{x}$ ist aber viel größer als in $\hat{x}$:

$$\|\tilde{x} - x\|_\infty = 9.49 \cdot 10^{-3} \gg \|\hat{x} - x\|_\infty = 8.90 \cdot 10^{-5}.$$

Zeilenskalierung

Forme das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ in ein äquivalentes Systems

$$\underbrace{\boldsymbol{D_z A}}\,\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{D_z b}}$$
$$\boldsymbol{A}_{\text{neu}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{\text{neu}}$$

um, wobei $\boldsymbol{D_z}$ die Diagonalmatrix $\boldsymbol{D_z} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{d_1}, \ldots, \boldsymbol{d_n})$ bezeichnet.

Ziel: Wähle $\boldsymbol{D_z}$ so, dass die Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}_{\text{neu}}$ (wesentlich) kleiner ist als die der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Zeilenskalierung

Forme das Gleichungssystem $Ax = b$ in ein äquivalentes Systems

$$\underbrace{D_z A}\, x = \underbrace{D_z b}$$
$$A_{\text{neu}} x = b_{\text{neu}}$$

um, wobei D_z die Diagonalmatrix $D_z = \mathbf{diag}(d_1, \dots, d_n)$ bezeichnet.

Ziel: Wähle D_z so, dass die Konditionszahl der Matrix A_{neu} (wesentlich) kleiner ist als die der Matrix A.

Sei D_z die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen definiert durch

$$d_i = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)^{-1}$$

Die Matrix $D_z A$ nennt man (zeilen)skalierte Matrix.

Zeilenskalierung

Für die skalierte Matrix $D_z A$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |(D_z A)_{i,j}| = 1 \quad \text{für alle } i,$$

also sind die Betragssummen aller Zeilen gleich eins. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft heißt zeilenweise äquilibriert.

Zeilenskalierung

Für die skalierte Matrix $D_z A$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |(D_z A)_{i,j}| = 1 \quad \text{für alle } i,$$

also sind die Betragssummen aller Zeilen gleich eins. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft heißt zeilenweise äquilibriert.

Optimalitätseigenschaft

$\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(DA)$ für jede reguläre Diagonalmatrix D.

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung mit D_z liefert die minimale Konditionszahl bezüglich der Maximumnorm.

Insbesondere gilt $\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(A)$.

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Beispiel 3.18

Für

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix}}$$

erhält man $\boldsymbol{\kappa_\infty(A) = 201.2}$.

Mit der Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{D_z = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} & 10008 \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} & 110 \end{matrix}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008 \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \quad 110 \end{array}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.18

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008 \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \quad 110 \end{array}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$D_z A = \begin{pmatrix} 0.799 \cdot 10^{-3} & 0.999 \\ 0.455 & -0.545 \end{pmatrix}$$

und damit $\kappa_\infty(D_z A) = 3.40$.

Zeilenskalierung

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ – Zeilenskalierung $\rightarrow \boldsymbol{D_z A x} = \boldsymbol{D_z b}$.

Beachte: Die Fehlerverstärkung bzgl. Störungen in den Daten $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ ist für die Probleme

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{D_z b}, \boldsymbol{D_z A}) \rightarrow \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{D_z A})^{-1}\boldsymbol{D_z b}$$

dieselbe, d.h.,

die Äquilibrierung lässt die Kondition des Problems selbst unverändert.

Zeilenskalierung

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ – Zeilenskalierung $\rightarrow \boldsymbol{D_z A x} = \boldsymbol{D_z b}$.

Beachte: Die Fehlerverstärkung bzgl. Störungen in den Daten $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ ist für die Probleme

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{D_z b}, \boldsymbol{D_z A}) \rightarrow \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{D_z A})^{-1}\boldsymbol{D_z b}$$

dieselbe, d.h.,

die Äquilibrierung lässt die Kondition des Problems selbst unverändert.

Weshalb dann die Äquilibrierung?

Später wird erklärt, dass die Verstärkung von Rundungsfehlern in den Lösungsverfahren direkt mit der Konditionszahl der vorliegenden Matrix zusammenhängt:

eine kleinere Konditionszahl hat einen günstigen Effekt auf die Verstärkung von Rundungsfehlern bei der Weiterverarbeitung der Matrix.

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $x^T y$: $2n - 1$ Flop

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$: $\quad \boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T$: $\quad \boldsymbol{n^2}$ Flop
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2\,n^2 - n}$ Flop

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2\,n^2 - n}$ Flop
- Matrix-Matrix Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2n - 1}$ Flop
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2n^2 - n}$ Flop
- Matrix-Matrix Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{2n^3 - n^2}$ Flop

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n-1}$ Flop $\mathcal{O}(\boldsymbol{n})$
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n^2}$ Flop $\mathcal{O}(\boldsymbol{n^2})$
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2\,n^2-n}$ Flop $\mathcal{O}(\boldsymbol{n^2})$
- Matrix-Matrix Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{2\,n^3-n^2}$ Flop $\mathcal{O}(\boldsymbol{n^3})$

Beachte

Bei der Zählung der Rechenoperationen in einem Algorithmus werden nur Terme höchster Ordnung gezählt.

Beispiel 3.20

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ erlaubt eine einfache Lösung:

Beispiel 3.20

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ erlaubt eine einfache Lösung:

$$\boldsymbol{x_3} = \mathbf{4/2} = \mathbf{2}$$

Beispiel 3.20

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ erlaubt eine einfache Lösung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_3} &= \mathbf{4/2} = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x_2} &= \mathbf{1 - 3 \cdot 2} = \mathbf{-5} \end{aligned}$$

Beispiel 3.20

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ erlaubt eine einfache Lösung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_3} &= \mathbf{4/2} = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x_2} &= \mathbf{1 - 3 \cdot 2} = \mathbf{-5} \\ \boldsymbol{x_1} &= \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\big(\mathbf{0 - (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 2}\big) = \mathbf{-3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Rückwärtseinsetzen

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Definition

Eine Martix $R = (r_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{für } i > j$$

gilt.

Allgemeiner Fall:

$$\begin{array}{ccccccccc}
r_{1,1}\,x_1 & + & r_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & r_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & r_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & r_{2,n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & r_{n-1,n-1}\,x_{n-1} & + & r_{n-1,n}\,x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & r_{n,n},\,x_n & = & b_n
\end{array}$$

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Lösbarkeit

Da $\det \boldsymbol{R} = r_{1,1} r_{2,2} \cdots r_{n,n}$ gilt, ist

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

genau dann stets eindeutig lösbar, wenn alle Diagonaleinträge $r_{j,j}$, $j = 1, \ldots, n$, von Null verschieden sind.

Vorgehen:

- Beginnend bei der letzten Gleichung

$$x_n = b_n / r_{n,n}.$$

- Einsetzen von x_n in die zweitletzte Gleichung

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - r_{n-1,n} x_n) / r_{n-1,n-1}.$$

- ...

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Rückwärtseinsetzen

Für $j = n, n-1, \ldots, 2, 1$ berechne

$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} r_{j,k} x_k \right) \Big/ r_{j,j}$$

wobei die Summe für $j = n$ leer ist und als Null interpretiert wird.

Analog: untere Dreiecksmatrix L

- $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $l_{i,j} = 0$ für $i < j$
- Eindeutig lösbar, wenn $l_{j,j}$, $j = 1, \ldots, n$, von Null verschieden
- Vorwärtseinsetzen

Rechenaufwand

Für jedes $j = n-1, \dots, 1$:

1. $n - j$ Multiplikationen | Additionen,
2. eine Division,
3. und für $j = n$ eine Division.

Also insgesamt:

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j) = \frac{n(n-1)}{2}$ Additionen | Multiplikationen,
- n Divisionen.

Rechenaufwand für Rückwärtseinsetzen

ca. n^2 Flop

Eigenschaften

- Das Produkt von oberen (unteren) Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- Die Inverse einer oberen (unteren) nichtsingulären Dreiecksmatrix ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gerade das Produkt aller Diagonaleinträge.
- Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind gerade die Diagonaleinträge.

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ $(\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
$\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ $(\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
  $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
  $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix
- QR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{Q}$ orthogonale Matrix

Gauß-Elimination: LR-Zerlegung

Die bekannteste Methode, das System

$$\boldsymbol{A\,x = b} \qquad (\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$$

auf Dreiecksgestalt zu bringen, ist die Gauß-Elimination.

$$\boldsymbol{A = A^{(1)}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{matrix}}$$

Gauß-Elimination: LR-Zerlegung

Die bekannteste Methode, das System

$$A\,x = b \qquad (\det A \neq 0)$$

auf Dreiecksgestalt zu bringen, ist die Gauß-Elimination.

$$\underset{\displaystyle \left|\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right|}{A = A^{(1)}} \quad \rightarrow \quad \underset{\displaystyle \left|\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \circledast & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right|}{A^{(2)}}$$

Gauß-Elimination: LR-Zerlegung

Die bekannteste Methode, das System

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (\det \boldsymbol{A} \neq 0)$$

auf Dreiecksgestalt zu bringen, ist die Gauß-Elimination.

$$\underset{}{\overset{A = A^{(1)}}{\left|\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right|}} \;\rightarrow\; \overset{A^{(2)}}{\left|\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \circledast & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right|} \;\rightarrow\; \overset{A^{(3)}}{\left|\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & \circledast & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right|}$$

Gauß-Elimination: LR-Zerlegung

Die bekannteste Methode, das System

$$\boldsymbol{A\,x = b} \qquad (\det \boldsymbol{A} \neq 0)$$

auf Dreiecksgestalt zu bringen, ist die Gauß-Elimination.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(1)} \qquad\qquad \boldsymbol{A}^{(2)} \qquad\qquad \boldsymbol{A}^{(3)}$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right| \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \circledast & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right| \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & \circledast & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right|$$

- Einträge der Matrix $\boldsymbol{A}^{(k)}$ werden mit $\boldsymbol{a}_{i,j}^{(k)}$ notiert.
- Der Eintrag $\boldsymbol{a}_{j,j}^{(j)}$ ($\circledast$ oben) heißt Pivotelement.
- In entsprechender Weise ist auch die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ umzuformen.

Beispiel 3.24

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-8} \\ \mathbf{-16} \\ \mathbf{-12} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Gauß-Elimiation.

Wir benutzen die folgende Notation

$$\rightarrow \; (\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-12} \end{array} \right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,1} \times \text{Zeile } 1)$ von Zeile i

$j = 1$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,1} \times \text{Zeile } 1)$ von Zeile i

$j = 1$

$$\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{ccc} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \\ \ell_{2,1} &= \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} &= \frac{6}{2} \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,1} \times$ Zeile $1)$ von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{ccc} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1 \qquad \begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \rightarrow \\
\ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2}
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -5 & 4 & 1 & -12
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,1}} \times$ Zeile $\mathbf{1}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{j = 1}$

$$\begin{array}{rcl} & \rightarrow & \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$
\begin{aligned}
&& \rightarrow \\
\ell_{2,1} &= \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} &= \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} &= \frac{-2}{2}
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 1 & -12
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,1}} \times$ Zeile 1) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{j = 1}$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \boldsymbol{\ell_{2,1}} & = & \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{\ell_{3,1}} & = & \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{\ell_{4,1}} & = & \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{2}} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{-3} & \mathbf{-19} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-11} \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$j = 2$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i
  $j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i
  $j = 2$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ & & \rightarrow \\ \ell_{3,2} & = & \frac{4}{2} \\ & & \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$j = 2$

$$\ell_{3,2} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1 \qquad \begin{array}{rcl} & & \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$$j = 2 \qquad \begin{array}{rcl} & & \\ & & \\ \ell_{3,2} & = & \frac{4}{2} \\ & & \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$j = 2$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ & & \rightarrow \\ \ell_{3,2} & = & \frac{4}{2} \\ & & \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i
  $j = 1$

$$
\begin{aligned}
&& \rightarrow \\
\ell_{2,1} &= \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} &= \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} &= \frac{-2}{2}
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -11
\end{array}\right)
$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2}$ × Zeile 2) von Zeile i
  $j = 2$

$$
\begin{aligned}
&& \rightarrow \\
\ell_{3,2} &= \frac{4}{2}
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -11
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$j = 2$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ & & \rightarrow \\ \ell_{3,2} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} & = & \frac{-6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

  $j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

  $j = 2$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ & & \rightarrow \\ \ell_{3,2} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} & = & \frac{-6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$j = 2$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ & & \rightarrow \\ \ell_{3,2} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} & = & \frac{-6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$j = 1$

$$\begin{array}{rcl} & & \rightarrow \\ \ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2}$ × Zeile 2) von Zeile i

$j = 2$

$$\begin{array}{rcl} & & \\ & & \rightarrow \\ \ell_{3,2} & = & \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} & = & \frac{-6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

  $j = 1$

$$
\begin{array}{lcl}
 & & \rightarrow \\
\ell_{2,1} & = & \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} & = & \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} & = & \frac{-2}{2}
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -11
\end{array}\right)
$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

  $j = 2$

$$
\begin{array}{lcl}
 & & \\
 & & \rightarrow \\
\ell_{3,2} & = & \frac{4}{2} \\
\ell_{4,2} & = & \frac{-6}{2}
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 10 & -11 & -41
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,3}} \times$ Zeile $\mathbf{3}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{j = 3}$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{-11} & \mathbf{-41} \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$j = 3$

$$\ell_{4,3} = \frac{10}{2} \qquad \rightarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3}$ × Zeile 3) von Zeile i

$j = 3$

$$\ell_{4,3} = \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -41 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,3}}$ × Zeile $\mathbf{3}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{j = 3}$$

$$\boldsymbol{\ell_{4,3} = \frac{10}{2}} \qquad \rightarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-46} & \mathbf{-41} \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,3}}$ × Zeile $\mathbf{3}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{j = 3}$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & & \rightarrow \\ \boldsymbol{\ell_{4,3}} & = & \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-46} & \mathbf{-46} \end{array}\right)$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere $(\boldsymbol{\ell_{i,3}} \times$ Zeile $\mathbf{3})$ von Zeile $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{j = 3}$

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ \boldsymbol{\ell_{4,3}} = & \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-46} & \mathbf{-46} \end{array}\right) = (\boldsymbol{R} \,|\, \boldsymbol{c})$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$j = 3$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Wegen $Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$ liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(\quad , \quad , \quad , \quad \right)^T.$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$j = 3 \qquad \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R\,|\,c)$$

Wegen $Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$ liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(\quad , \quad , \quad , \quad 1 \right)^T.$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$j = 3 \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \to \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Wegen $Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$ liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(\quad , \quad , -3, \; 1 \right)^T.$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$j = 3 \qquad \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R\,|\,c)$$

Wegen $Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$ liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(\quad , \quad 2, -3, \quad 1 \right)^T .$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$j = 3 \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Wegen $Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$ liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(\frac{-9}{2}, \quad 2, -3, \quad 1\right)^T.$$

Beispiel 3.24

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$j = 3 \qquad \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \quad \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R\,|\,c)$$

Wegen $Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$ liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(\frac{-9}{2}, \quad 2, -3, \quad 1\right)^T.$$

Gauß-Elimination ohne Pivotisierung

- Bestimme $(A\,|\,b) \rightarrow (R\,|\,c)$
- Löse $R\,x = c$

Beispiel 3.24

Für die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R},$$

wobei

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}$$

die bei der Gauß-Elimination berechneten Dreiecksmatrizen sind.

LR-Zerlegung

Ein bemerkenswertes "Nebenprodukt" der Gauß-Elimination ist also eine Faktorisierung von $\boldsymbol{A}$ in ein Produkt einer normierten unteren Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und oberen Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$.

Satz 3.26

Sind im Gauß-Algorithmus stets alle Pivotelemente ungleich null, dann erhält man

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R},$$

wobei $\boldsymbol{R}$ eine obere Dreiecksmatrix und $\boldsymbol{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

LR-Zerlegung

Ein bemerkenswertes "Nebenprodukt" der Gauß-Elimination ist also eine Faktorisierung von $\boldsymbol{A}$ in ein Produkt einer normierten unteren Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und oberen Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$.

Satz 3.26

Sind im Gauß-Algorithmus stets alle Pivotelemente ungleich null, dann erhält man

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R},$$

wobei $\boldsymbol{R}$ eine obere Dreiecksmatrix und $\boldsymbol{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

Frage:

- Was passiert, wenn das Pivotelement identisch null ist?
- Was passiert, wenn das Pivotelement "sehr klein" ist?

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet **nicht**, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- Bei verschwindendem Pivotelement ist das Vertauschen von Zeilen notwendig.
- Selbst wenn das Pivotelement ungleich null, ist eine Vertauschung von Zeilen angebracht, um die Stabilität der Gauß-Elimination (bzw. LR-Zerlegung) zu verbessern.

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet **nicht**, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- Bei verschwindendem Pivotelement ist das Vertauschen von Zeilen notwendig.
- Selbst wenn das Pivotelement ungleich null, ist eine Vertauschung von Zeilen angebracht, um die Stabilität der Gauß-Elimination (bzw. LR-Zerlegung) zu verbessern.
- Als Pivotelement wählt man das betragsgrößte Element der jeweiligen Spalte.
- Da man das j-te Pivotelement in der j-ten Spalte sucht, nennt man diesen Vertauschungsvorgang Spaltenpivotisierung. Die Matrix sollte zuvor äquilibriert werden.

Beispiel 3.28

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0.00031} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{-7} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.28

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Mit $l_{2,1} = 1/0.00031$ ergibt die Gauß-Elimination

$$(R \mid c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & 1 - \frac{1}{0.00031} & -7 - \frac{-3}{0.00031} \end{array} \right),$$

und bei 4-stelliger Rechnung schließlich

$$(R \mid c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.31 \cdot 10^{-1} & 1 & -0.3 \cdot 10^{1} \\ 0 & -0.3225 \cdot 10^{4} & 0.9670 \cdot 10^{4} \end{array} \right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert dann ...

Beispiel 3.28

$$\tilde{x}_1 \approx -0.6452 \cdot 10^1, \quad \tilde{x}_2 \approx -0.2998 \cdot 10^1.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \quad x_2 = -2.998759\ldots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Beispiel 3.28

$$\tilde{x}_1 \approx -0.6452 \cdot 10^1, \quad \tilde{x}_2 \approx -0.2998 \cdot 10^1.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \quad x_2 = -2.998759\ldots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Dieses Ergebnis ist *unakzeptabel*, weil die Kondition des Problems sehr gut ist: $\kappa_\infty(A) = 4.00$.

Beispiel 3.28

$$\tilde{x}_1 \approx -0.6452 \cdot 10^1, \quad \tilde{x}_2 \approx -0.2998 \cdot 10^1.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \quad x_2 = -2.998759\ldots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Dieses Ergebnis ist *unakzeptabel*, weil die Kondition des Problems sehr gut ist: $\kappa_\infty(A) = 4.00$.

Nach Spaltenpivotisierung mit 4-stelliger Rechnung erhält man

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -0.7333 \cdot 10^1 \\ 0 & 0.9997 & -0.2998 \cdot 10^1 \end{array}\right)$$

und damit

$$\tilde{x}_1 \approx -4.001, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.999,$$

also völlig akzeptable Werte.

Spaltenpivotisierung

Ziel: Vertauschen der Zeilen in Matrix $\boldsymbol{A}$ wärend LR-Zerlegung.

Frage

- Auswirkung auf die LR-Zerlegung?

Spaltenpivotisierung

Ziel: Vertauschen der Zeilen in Matrix A wärend LR-Zerlegung.

Frage

- Auswirkung auf die LR-Zerlegung?

1. Permutationsmatrix: Die Permutationsmatrix

$$P_\pi : (e^{\pi(1)}\ e^{\pi(2)} \dots e^{\pi(n)})^T.$$

entsteht aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen der Zeilen gemäß der Permutation $\pi \in S_n$, wobei

- e^i den i-ten Basisvektor bezeichnet, und
- S_n die Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet.

Beispiel: $\pi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ mit $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$ (oder $\pi = (3, 1, 2)$) ist eine Permutation in S_3.

Permutationsmatrix

Sei $P_{i,j}$ die elementare Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Permutationsmatrix

Sei $P_{i,j}$ die elementare Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Beispiel

Für $n = 4$, $i = 2$, $j = 4$ erhält man

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Permutationsmatrix

Sei $P_{i,j}$ die elementare Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Beispiel

Für $n = 4$, $i = 2$, $j = 4$ erhält man

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die folgenden Resultate

$$\det P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ -1 & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

und

$$P_\pi^{-1} = P_\pi^T.$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{2,3}^T = P_{2,3}^{-1}.$$

$$P_{2,3}\,A$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{2,3}^T = P_{2,3}^{-1}.$$

$$P_{2,3}\,A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{2,3}^T = P_{2,3}^{-1}.$$

$$P_{2,3}\,A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A\,P_{2,3}$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{2,3}^T = P_{2,3}^{-1}.$$

$$P_{2,3}\,A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A\,P_{2,3} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P_{2,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P_{2,3}^T} = \boldsymbol{P_{2,3}^{-1}}.$$

$$\boldsymbol{P_{2,3}\,A} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$\boldsymbol{A\,P_{2,3}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

$$\boldsymbol{P_{2,3}\,A\,P_{2,3}^{-1}} \quad = \quad \boldsymbol{P_{2,3}\,A\,P_{2,3}}$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{2,3}^T = P_{2,3}^{-1}.$$

$$P_{2,3}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A\,P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

$$P_{2,3}\,A\,P_{2,3}^{-1} = P_{2,3}\,A\,P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen von } a,\ b$$

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung ist für jede nicht- singuläre Matrix durchführbar.

Satz 3.31

Zu jeder nichtsingulären Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert eine Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}$, eine (dazu) eindeutige untere normierte Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$, deren Einträge sämtlich betragsmäßig durch $\mathbf{1}$ beschränkt sind, und eine eindeutige obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$, so dass

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LR}.$$

Die Matrizen $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ ergeben sich aus der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung.

Durchführung der LR-Zerlegung

Skalierung und Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Bestimme die Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{D} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{d_1, \ldots, d_n}),$$

so dass $\boldsymbol{D\,A}$ zeilenweise äquilibriert ist, d.h.

$$\boldsymbol{d_i = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\right)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n.}$$

- Wende Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung auf $\boldsymbol{D\,A}$ an.

Durchführung der LR-Zerlegung

Skalierung und Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Bestimme die Diagonalmatrix
$$D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n),$$
so dass $D\,A$ zeilenweise äquilibriert ist, d.h.
$$d_i = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\right)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
- Wende Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung auf $D\,A$ an. Im j-ten Schritt der Gauß-Elimination wählt man eine Zeile als Pivotzeile, die das betragsmäßig größte Element in der ersten Spalte der $(n+1-j) \times (n+1-j)$ rechten unteren Restmatrix hat. Falls diese Pivotzeile und die j-te Zeile verschieden sind, werden sie vertauscht.

Aufwand

- Zeilensummenberechnung: $n(n-1)$ Additionen.
- Berechnung der Skalierung: n Divisionen, n^2 Multiplikationen.
- Für $j = 1, 2, \ldots, n-1$, Berechnung der neuen Einträge,
  - in L: $(n-j)$ Divisionen
  - in R: $(n-j)^2$ Multiplikationen | Additionen

Dominierender Aufwand: $2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 = 2\sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim n^3/3.$

Rechenaufwand 3.29

LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung kostet ca.

$$\frac{2}{3}n^3 \text{ Flop}$$

Die Skalierung (falls nötig) kostet nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

Beispiel 3.37

Zeilenäquilibrierung

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{D}$$

Beispiel 3.37

Zeilenäquilibrierung

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{DA}$$

Beispiel 3.37

Zeilenäquilibrierung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$\boldsymbol{DA} \quad \xrightarrow{\textit{Vertauschung}}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$\boldsymbol{DA} \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{matrix}}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{matrix}} \xrightarrow{\text{Elimination}}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$\boldsymbol{DA} \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \boxed{\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{array}} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \boxed{\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & \\ & & \end{array}}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & & \\ & & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$
DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \cline{1-1} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & & \\ \hline \end{array}
$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{matrix}} \xrightarrow{\text{Elimination}} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \boxed{\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{array}} \xrightarrow{\text{Elimination}} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\textit{Elimination}} \left[\begin{array}{c|cc} \multicolumn{1}{c}{-\frac{1}{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \left[\begin{array}{c|cc} \multicolumn{1}{c}{-\frac{1}{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline\end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|ccc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & & \\ & & \\ \hline\end{array}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \cline{2-3} -\frac{2}{3} & & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$\boldsymbol{DA} \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline\end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|cc|c|}\hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \hline\end{array}$$

Beispiel 3.37

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \cline{2-2} -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Beispiel 3.37

Man rechnet einfach nach, dass

$$\boldsymbol{LR = PDA}$$

gilt, wobei

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\boldsymbol{P}$ ist das Produkt von $\boldsymbol{P_{2,3}}$ und $\boldsymbol{P_{1,3}}$.

Beispiel 3.37

Man rechnet einfach nach, dass

$$\boldsymbol{LR = PDA}$$

gilt, wobei

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\boldsymbol{P}$ ist das Produkt von $\boldsymbol{P_{2,3}}$ und $\boldsymbol{P_{1,3}}$.

Merke

- Skalierung/Äquilibrierung beeinflusst die Kondition: die vorliegende Matrix wird in eine skalierte Matrix mit einer i.A. kleineren Konditionszahl umgeformt.
- Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination/ LR-Zerlegung.

Anwendungen der LR-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die schon zeilenweise äquilibriert ist. Sei für diese Matrix die LR-Zerlegung $PA = L\,R$ bekannt.

Anwendungen der LR-Zerlegung

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die schon zeilenweise äquilibriert ist. Sei für diese Matrix die LR-Zerlegung $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ bekannt.

1. Lösen eines Gleichungssystems

Die Lösung von

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ergibt sich über die Lösung zweier Dreieckssysteme

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}\,\underbrace{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}}_{=\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}$$

- Bestimme $\boldsymbol{y}$ durch Vorwärtseinsetzen aus $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}$.
- Berechne $\boldsymbol{x}$ aus $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ durch Rückwärtseinsetzen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen $\boldsymbol{x}^k$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{b}^k, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{K},$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine konstante Matrix ist und $\boldsymbol{b}^k,\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{K},$ verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{K},$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine konstante Matrix ist und $\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}},\ \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{K}$, verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Vorgehen

- Bestimme (einmalig) LR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$, d.h.

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$$

- Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für jede rechte Seite

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}} &= \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} &= \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}} \end{aligned}$$

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen x^k des linearen Gleichungssystems

$$A\,x^k = b^k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

wobei A eine konstante Matrix ist und b^k, $k = 1, \ldots, K$, verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Vorgehen

- Bestimme (einmalig) LR-Zerlegung von A, d.h.

$$P\,A = L\,R$$

- Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für jede rechte Seite

$$\begin{aligned} L\,y^k &= P\,b^k \\ R\,x^k &= y^k \end{aligned}$$

Aufwand: $\frac{2}{3}n^3 + K2n^2$ (vs. $K\frac{2}{3}n^3$ bei wiederholter Gauß-Elimination)

Anwendungen der LR-Zerlegung

3. Berechnung der Inversen

Sei $x^i \in \mathbb{R}^n$ die i-te Spalte der Inversen von A:

$$A^{-1} = (x^1\ x^2\ \ldots\ x^n).$$

Aus $AA^{-1} = I$ folgt

$$A\,x^i = e^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Anwendungen der LR-Zerlegung

3. Berechnung der Inversen

Sei $\boldsymbol{x}^i \in \mathbb{R}^n$ die $\boldsymbol{i}$-te Spalte der Inversen von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{x}^1\ \boldsymbol{x}^2\ \ldots\ \boldsymbol{x}^n).$$

Aus $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ folgt

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{e}^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zur Berechnung der Inversen bietet sich folgende Strategie an:

- Bestimme die LR-Zerlegung $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ über Gauß- Elimination mit Spaltenpivotisierung,
- Löse die Gleichungssysteme

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{e}^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Gesamtaufwand: etwa $\frac{8}{3}n^3$ Operationen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

4. Berechnung von Determinanten

Aus $P\,A = L\,R$ folgt

$$\det P\ \det A = \det L\ \det R = \det R.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\det P &= \det P_{n,r_n} \cdots \det P_{n-1,r_{n-1}}\\ &= (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}},\end{aligned}$$

folgt

$$\det A = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} \prod_{j=1}^{n} r_{j,j}.$$

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
  $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq 0)$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
  $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{T}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ $(\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
$\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix
- QR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{Q}$ orthogonale Matrix

Symmetrisch positiv definite Matrix

Definition

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ heißt symmetrisch positiv definit (s.p.d.), falls

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A} \qquad \text{(Symmetrie)}$$

und

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} \qquad \text{(positiv definit)}$$

für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, gilt.

Symmetrisch positiv definite Matrix

Definition

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch positiv definit (s.p.d.), falls

$$A^T = A \qquad \text{(Symmetrie)}$$

und

$$x^T A x > 0 \qquad \text{(positiv definit)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, gilt.

Tritt bei vielen (physikalischen) Problemen auf:

- Netzwerke mit passiven Komponenten
- Diffusions-/Wärmeleitungsgleichung
- Normalgleichungen (Lineare Ausgleichsrechnung)
- ...

Beispiel 3.39

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ (Identität) ist symmetrisch positiv definit.

   Die Symmetrie ist trivial und

   $$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{I} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 > 0,$$

   falls $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

Beispiel 3.39

1. $A = I$ (Identität) ist symmetrisch positiv definit.

   Die Symmetrie ist trivial und

   $$x^T I x = x^T x = \|x\|_2^2 > 0,$$

   falls $x \neq 0$.

2. Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, und B habe vollen Rang.

   Dann ist

   $$A := B^T B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

   s.p.d.. Symmetrie von A:

   $$A^T = (B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B = A.$$

Beispiel 3.39

Positiv-definitheit von $\boldsymbol{A}$:
Sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Dann gilt

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\|_2^2 \geq \mathbf{0}.$$

Es gilt

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\|_2^2 = \mathbf{0}$$

nur falls

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

gilt. Da $\boldsymbol{B}$ vollen Rang hat, muss daher

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

sein.

Satz 3.40

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ sei s.p.d. Dann gelten folgende Aussagen:

- $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar, und $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist s.p.d.
- $\boldsymbol{A}$ hat nur strikt positive (insbesondere reelle) Eigenwerte.
- $\boldsymbol{A}$ hat nur strikt positive Diagonaleinträge und der betragsgrößte Eintrag von $\boldsymbol{A}$ liegt auf der Diagonalen.
- Bei Gauß-Elimination ohne Pivotisierung sind alle Pivotelemente strikt positiv.

Satz 3.40

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei s.p.d. Dann gelten folgende Aussagen:

- $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar, und $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist s.p.d.
- $\boldsymbol{A}$ hat nur strikt positive (insbesondere reelle) Eigenwerte.
- $\boldsymbol{A}$ hat nur strikt positive Diagonaleinträge und der betragsgrößte Eintrag von $\boldsymbol{A}$ liegt auf der Diagonalen.
- Bei Gauß-Elimination ohne Pivotisierung sind alle Pivotelemente strikt positiv.

Beachte:

Bei s.p.d. Matrizen ist die Gauß-Elimination ohne Pivotisierung durchführbar $\Rightarrow$ "Symmetrische" LR-Zerlegung

Cholesky-Zerlegung

Satz 3.41

Jede s.p.d. Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}},$$

wobei $\boldsymbol{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $\boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen

$$\boldsymbol{d_{i,i} > 0, i = 1, \ldots, n},$$

ist.
Umgekehrt ist jede Matrix der Form $\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, wobei $\boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix ist, die $\boldsymbol{d_{i,i} > 0}$ erfüllt, und $\boldsymbol{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix ist, symmetrisch positiv definit.

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

Beispiel: Für $n = 3$ ergibt sich

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

und damit

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

Beispiel: Für $n = 3$ ergibt sich

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

und damit

$$LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

Beispiel: Für $n = 3$ ergibt sich

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

und damit

$$\begin{aligned} LDL^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

$$\ldots = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \ldots & \ldots \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} & \ldots \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} & \ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$=$$

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

$$\ldots = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \cdots & \cdots \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} & \cdots \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} & \ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A$$

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

$$\ldots = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \ldots & \ldots \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} & \ldots \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} & \ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & \ldots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A$$

Die elementweise Auswertung der Gleichung $LDL^T = A$, die man aufgrund der Symmetrie auf den unteren Dreiecksteil beschränken kann, ergibt dann zum Beispiel

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

$$\ldots = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \ldots & \ldots \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} & \ldots \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} & \ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & \ldots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A$$

Die elementweise Auswertung der Gleichung $LDL^T = A$, die man aufgrund der Symmetrie auf den unteren Dreiecksteil beschränken kann, ergibt dann zum Beispiel

$$d_{1,1} = a_{1,1}$$

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

$$\dots = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \dots & \dots \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} & \dots \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} & \ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A$$

Die elementweise Auswertung der Gleichung $LDL^T = A$, die man aufgrund der Symmetrie auf den unteren Dreiecksteil beschränken kann, ergibt dann zum Beispiel

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= a_{1,1} \\ \ell_{2,1} &= a_{2,1}/d_{1,1} \end{aligned}$$

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

$$\ldots = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \ldots & \ldots \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} & \ldots \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} & \ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & \ldots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A$$

Die elementweise Auswertung der Gleichung $LDL^T = A$, die man aufgrund der Symmetrie auf den unteren Dreiecksteil beschränken kann, ergibt dann zum Beispiel

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= a_{1,1} \\ \ell_{2,1} &= a_{2,1}/d_{1,1} \\ \ell_{3,1} &= a_{3,1}/d_{1,1} \end{aligned}$$

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

$$\ldots = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \ldots & \ldots \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} & \ldots \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} & \ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & \ldots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A$$

Die elementweise Auswertung der Gleichung $LDL^T = A$, die man aufgrund der Symmetrie auf den unteren Dreiecksteil beschränken kann, ergibt dann zum Beispiel

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= a_{1,1} \\ \ell_{2,1} &= a_{2,1}/d_{1,1} \\ \ell_{3,1} &= a_{3,1}/d_{1,1} \\ d_{2,2} &= a_{2,2} - \ell_{2,1}^2 d_{1,1} \end{aligned}$$

Konstruktion der Cholesky-Zerlegung

$$\ldots = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \ldots & \ldots \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} & \ldots \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} & \ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & \ldots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A$$

Die elementweise Auswertung der Gleichung $LDL^T = A$, die man aufgrund der Symmetrie auf den unteren Dreiecksteil beschränken kann, ergibt dann zum Beispiel

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= a_{1,1} \\ \ell_{2,1} &= a_{2,1}/d_{1,1} \\ \ell_{3,1} &= a_{3,1}/d_{1,1} \\ d_{2,2} &= a_{2,2} - \ell_{2,1}^2 d_{1,1} \\ d_{3,2} &= \ldots \end{aligned}$$

Beispiel 3.42 (Konstruktion der Cholesky-Zerlegung)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.42 (Konstruktion der Cholesky-Zerlegung)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Beispiel 3.42 (Konstruktion der Cholesky-Zerlegung)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} LDL^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Beispiel 3.42 (Konstruktion der Cholesky-Zerlegung)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} LDL^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Die elementweise Auswertung der Gleichung $LDL^T = A$ kann man aufgrund der Symmetrie auf den unteren Dreiecksteil beschränken.

Beispiel 3.42

$$\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 6 & 21 & * \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.42

$$\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 6 & 21 & * \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1,1)-Element: $d_{1,1} = a_{1,1} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{1,1} = 2}$

Beispiel 3.42

$$\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 6 & 21 & * \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1,1)-Element: $d_{1,1} = a_{1,1} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{1,1} = 2}$

(2,1)-Element: $\ell_{2,1}d_{1,1} = a_{2,1} = 6 \Rightarrow \ell_{2,1} = 6/2 \Rightarrow \boxed{\ell_{2,1} = 3}$

Beispiel 3.42

$$\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 6 & 21 & * \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1,1)-Element: $d_{1,1} = a_{1,1} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{1,1} = 2}$

(2,1)-Element: $\ell_{2,1}d_{1,1} = a_{2,1} = 6 \Rightarrow \ell_{2,1} = 6/2 \Rightarrow \boxed{\ell_{2,1} = 3}$

(3,1)-Element: $\ell_{3,1}d_{1,1} = a_{3,1} = \text{-}2 \Rightarrow \ell_{3,1} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{\ell_{3,1} = 1}$

Beispiel 3.42

$$\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 6 & 21 & * \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1,1)-Element: $d_{1,1} = a_{1,1} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{1,1} = 2}$

(2,1)-Element: $\ell_{2,1}d_{1,1} = a_{2,1} = 6 \Rightarrow \ell_{2,1} = 6/2 \Rightarrow \boxed{\ell_{2,1} = 3}$

(3,1)-Element: $\ell_{3,1}d_{1,1} = a_{3,1} = \text{-}2 \Rightarrow \ell_{3,1} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{\ell_{3,1} = 1}$

(2,2)-Element: $\ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} = a_{2,2} = 21$

$\Rightarrow d_{2,2} = 21 - 9 \cdot 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{2,2} = 3}$

Beispiel 3.42

$$\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 6 & 21 & * \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1,1)-Element: $d_{1,1} = a_{1,1} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{1,1} = 2}$

(2,1)-Element: $\ell_{2,1}d_{1,1} = a_{2,1} = 6 \Rightarrow \ell_{2,1} = 6/2 \Rightarrow \boxed{\ell_{2,1} = 3}$

(3,1)-Element: $\ell_{3,1}d_{1,1} = a_{3,1} = \text{-}2 \Rightarrow \ell_{3,1} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{\ell_{3,1} = 1}$

(2,2)-Element: $\ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} = a_{2,2} = 21$

$\Rightarrow d_{2,2} = 21 - 9 \cdot 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{2,2} = 3}$

(3,2)-Element: $\ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} = a_{3,2} = 0$

$\Rightarrow \ell_{3.2} = -(-1) \cdot 2 \cdot 3/3 \quad \Rightarrow \boxed{\ell_{3,2} = 2}$

Beispiel 3.42

$$\begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 6 & 21 & * \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1,1)-Element: $d_{1,1} = a_{1,1} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{1,1} = 2}$

(2,1)-Element: $\ell_{2,1}d_{1,1} = a_{2,1} = 6 \Rightarrow \ell_{2,1} = 6/2 \Rightarrow \boxed{\ell_{2,1} = 3}$

(3,1)-Element: $\ell_{3,1}d_{1,1} = a_{3,1} = \text{-}2 \Rightarrow \ell_{3,1} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{\ell_{3,1} = 1}$

(2,2)-Element: $\ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} = a_{2,2} = 21$

$\Rightarrow d_{2,2} = 21 - 9 \cdot 2 \quad \Rightarrow \boxed{d_{2,2} = 3}$

(3,2)-Element: $\ell_{2,1}\ell_{3,1}d_{1,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} = a_{3,2} = 0$

$\Rightarrow \ell_{3.2} = -(-1) \cdot 2 \cdot 3/3 \quad \Rightarrow \boxed{\ell_{3,2} = 2}$

(3,3)-Element: $\ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} = a_{3,3} = 16$

$\Rightarrow d_{3,3} = 16 - (-1)^2 - 2^2 \cdot 3 \quad \Rightarrow \boxed{d_{3,3} = 2}$

Beispiel 3.35.

(1,1)-Element:	$d_{1,1} = 2$	$\Rightarrow$	$\boxed{d_{1,1} = 2}$
(2,1)-Element:	$\ell_{2,1} d_{1,1} = 6$	$\Rightarrow$	$\boxed{\ell_{2,1} = 3}$
(3,1)-Element:	$\ell_{3,1} d_{1,1} = \text{-}2$	$\Rightarrow$	$\boxed{\ell_{3,1} = \text{-}1}$
(2,2)-Element:	$\ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} = 21$	$\Rightarrow$	$\boxed{d_{2,2} = 3}$
(3,2)-Element:	$\ell_{2,1} \ell_{3,1} d_{1,1} + \ell_{3,2} d_{2,2} = 0$	$\Rightarrow$	$\boxed{\ell_{3,2} = 2}$
(3,3)-Element:	$\ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} = 16$	$\Rightarrow$	$\boxed{d_{3,3} = 2}$

Beispiel 3.35.

(1,1)-Element: $\boldsymbol{d_{1,1} = 2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{d_{1,1} = 2}}$

(2,1)-Element: $\boldsymbol{\ell_{2,1} d_{1,1} = 6} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\ell_{2,1} = 3}}$

(3,1)-Element: $\boldsymbol{\ell_{3,1} d_{1,1} = \text{-}2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\ell_{3,1} = \text{-}1}}$

(2,2)-Element: $\boldsymbol{\ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} = 21} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{d_{2,2} = 3}}$

(3,2)-Element: $\boldsymbol{\ell_{2,1}\ell_{3,1} d_{1,1} + \ell_{3,2} d_{2,2} = 0} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\ell_{3,2} = 2}}$

(3,3)-Element: $\boldsymbol{\ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} = 16} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{d_{3,3} = 2}}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \text{ und } \boldsymbol{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Cholesky-Verfahren

Berechnung der Einträge von L und D

Für die aufeinander folgenden Spalten , $k = 1, 2, \ldots, n$, hat man explizite Formeln für $d_{k,k}$ und $\ell_{i,k} \quad (i > k)$:

$$d_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{k,j}^2 d_{j,j},$$

$$\ell_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{i,j} d_{j,j} \ell_{k,j}}{d_{k,k}}$$

Programmentwurf Cholesky-Verfahren

Für $k = 1, 2, \ldots, n$:

für $j = 1, \ldots, k-1$: $c_{j,k} \leftarrow a_{k,j} a_{j,j}$;

diag $\leftarrow a_{k,k} - \sum_{j<k} a_{k,j} c_{j,k}$;

falls diag $< 10^{-5} a_{k,k}$ Abbruch

$a_{k,k} \leftarrow$ diag,

für $i = k+1, \ldots, n$

$a_{i,k} \leftarrow \left(a_{i,k} - \sum_{j<k} a_{i,j} c_{k,j}\right) / a_{k,k}$;

Rechenaufwand

Man kann das Cholesky-Verfahren mit ca. $\frac{1}{3}n^3$ Flop realisieren, also etwa die Hälfte des Aufwands der LR-Zerlegung.

Bemerkung

- $\boldsymbol{LDL^T}$ entspricht der LR-Zerlegung für $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{DL^T}$. Bei s.p.d. Matrizen ist Pivotisierung weder nötig noch sinnvoll. Das Cholesky-Verfahren ist ohne Pivotisierung stabil. Pivotisierung würde die Symmetrie der Matrix zerstören.

Bemerkung

- $\boldsymbol{LDL^T}$ entspricht der LR-Zerlegung für $\boldsymbol{R = DL^T}$. Bei s.p.d. Matrizen ist Pivotisierung weder nötig noch sinnvoll. Das Cholesky-Verfahren ist ohne Pivotisierung stabil. Pivotisierung würde die Symmetrie der Matrix zerstören.

- Die Lösung des Problems $\boldsymbol{Ax = b}$ reduziert sich auf

$$\boldsymbol{L\underbrace{DL^Tx}_{=y} = b}, \text{ d.h. } \boldsymbol{Ly = b} \text{ und } \boldsymbol{L^Tx = D^{-1}y}.$$

Bemerkung

- $\boldsymbol{LDL^T}$ entspricht der LR-Zerlegung für $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{DL^T}$. Bei s.p.d. Matrizen ist Pivotisierung weder nötig noch sinnvoll. Das Cholesky-Verfahren ist ohne Pivotisierung stabil. Pivotisierung würde die Symmetrie der Matrix zerstören.

- Die Lösung des Problems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ reduziert sich auf

$$\boldsymbol{L}\,\underbrace{\boldsymbol{DL^T x}}_{=\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{b}, \ \text{d.h.} \ \ \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \ \ \text{und} \ \ \boldsymbol{L^T x} = \boldsymbol{D^{-1} y}.$$

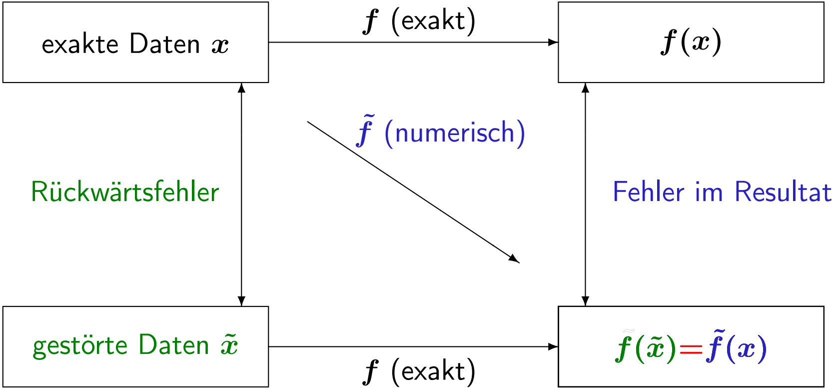
- In obiger Version enthält das Verfahren die Abfrage

$$\mathbf{diag} < \mathbf{10^{-5}} \boldsymbol{a_{k,k}}$$

Falls dies gilt, kann nicht mehr gewährleistet werden, dass das entsprechende Pivotelement strikt positiv ist.
In diesem Sinne *testet* das Verfahren Positiv-Definitheit.

Stabilitätsanalyse Cholesky-Verfahren und Gauß-Elimination

Wiederholung: Rückwärtsanalyse



Stabilität des Cholesky-Verfahrens

Betrachte $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, mit $\boldsymbol{A}$ s.p.d.. Berechnung der Lösung mittels Cholesky-Verfahren.
Aufgrund der Rundungsfehler können weder die Zerlegung noch die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution exakt durchgeführt werden.

Stabilität des Cholesky-Verfahrens

Betrachte $\boldsymbol{Ax = b}$, mit $\boldsymbol{A}$ s.p.d.. Berechnung der Lösung mittels Cholesky-Verfahren.
Aufgrund der Rundungsfehler können weder die Zerlegung noch die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution exakt durchgeführt werden.

Man kann zeigen: die berechnete Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist die exakte Lösung eines gestörten Systems

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Delta A})\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b},$$

wobei man die relative Größe der Störung durch

$$\boldsymbol{\delta_A} := \frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2} \leq \boldsymbol{c_n}\mathrm{eps}$$

abschätzen kann. Die Konstante $\boldsymbol{c_n}$ hängt nur von der Dimension ab.
"Fast immer": $\boldsymbol{\delta_A} \sim \mathrm{eps}$.

Stabilität des Cholesky-Verfahrens

Somit ist dieser Algorithmus rückwärts stabil:

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}}{1-\kappa_2(A)\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}}$$

$$\leq \frac{\kappa_2(A)\delta_A}{1-\kappa_2(A)\delta_A} \approx \kappa_2(A)\delta_A \qquad \text{wenn } \kappa_2(A)\delta_A \ll 1.$$

Stabilität des Cholesky-Verfahrens

Somit ist dieser Algorithmus rückwärts stabil:

$$\begin{aligned}\frac{\|x-\tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} &\leq \frac{\kappa_2(A)\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}}{1-\kappa_2(A)\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}} \\ &\leq \frac{\kappa_2(A)\delta_A}{1-\kappa_2(A)\delta_A} \approx \kappa_2(A)\delta_A \qquad \text{wenn } \kappa_2(A)\delta_A \ll 1.\end{aligned}$$

- Das Lösen eines Systems $Ax = b$ mit einer s.p.d. Matrix A über das Cholesky-Verfahren ist ein stabiles Verfahren.

Stabilität der Gauß-Elimination

Betrachte $Ax = b$, mit A regulär. Berechnung der Lösung mittels Gauß-Elimination ohne/mit Pivotiserung.
Man kann zeigen: die berechnete Lösung $\tilde{x}$ ist die exakte Lösung eines gestörten Systems

$$(A + \Delta A)\tilde{x} = b,$$

wobei man die relative Größe der Störung durch

$$\delta_A := \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} \leq \hat{c}_n \mathrm{eps}$$

abschätzen kann. Hierbei ist

$$\hat{c}_n \leq n^2(3n+1)\rho_n(A)$$

und $\rho_n(A)$ der sogenante Wachstumfaktor

$$\rho_n(A) := \frac{\max_{i,j,k} |a_{i,j}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{i,j}|}$$

Stabilität der Gauß-Elimination

Verfahren ohne Pivotisierung: keine Kontrolle über den Wachstumfaktor.

$\rho_n(A)$ kann (auch für kleines n) beliebig groß sein.

$\Rightarrow$ Gauß-Elimination ohne Pivotisierung kein stabiles Verfahren.
(siehe Beispiel 3.28)

Stabilität der Gauß-Elimination

Verfahren ohne Pivotisierung: keine Kontrolle über den Wachstumfaktor.

$\rho_n(A)$ kann (auch für kleines n) beliebig groß sein.

$\Rightarrow$ Gauß-Elimination ohne Pivotisierung kein stabiles Verfahren.
(siehe Beispiel 3.28)

Verfahren mit Pivotisierung: $\rho_n(A) \leq 2^{n-1}$ (unabhängig von A !)

Zentrale Beobachtung

Es existieren Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für die der Wachstumsfaktor $\rho_n(A)$ (sehr) groß ist, sogar $\sim 2^{n-1}$. Für fast alle Matrizen A ist aber bei Gauß-Elimination mit Pivotisierung der Wachstumsfaktor klein (≤ 10).

Stabilität der Gauß-Elimination

Verfahren ohne Pivotisierung: keine Kontrolle über den Wachstumfaktor.

$\rho_n(A)$ kann (auch für kleines n) beliebig groß sein.

$\Rightarrow$ Gauß-Elimination ohne Pivotisierung kein stabiles Verfahren.
(siehe Beispiel 3.28)

Verfahren mit Pivotisierung: $\rho_n(A) \leq 2^{n-1}$ (unabhängig von A !)

Zentrale Beobachtung

Es existieren Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für die der Wachstumsfaktor $\rho_n(A)$ (sehr) groß ist, sogar $\sim 2^{n-1}$. Für fast alle Matrizen A ist aber bei Gauß-Elimination mit Pivotisierung der Wachstumsfaktor klein (≤ 10).

Gauß-Elimination **mit** Pivotisierung:

Fast immer ist $\delta_A = \mathcal{O}(\mathrm{eps})$, woraus dann Rückwärtsstabilität folgt.

Beispiel 3.49

Wir betrachten die Lösung von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine sogenannte Hilbert-Matrix ist

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix},$$

Sei $\boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{2n-1}\right)^T$, d.h. $\boldsymbol{x} = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T$.

Beispiel 3.49

Wir betrachten die Lösung von $\boldsymbol{A\,x = b}$, wobei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times n}}$ eine sogenannte Hilbert-Matrix ist

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix},$$

Sei $\boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{2n-1}\right)^T$, d.h. $\boldsymbol{x} = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T$.

Für $n = 12$ erhält man mit dem Cholesky-Verfahren auf einer Ma- schine mit $\mathrm{eps} \approx 10^{-16}$ einen Fehler im berechneten Resultat von

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx 1.6 \cdot 10^{-2}.$$

Erklärung: Konditionszahl $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \approx 10^{16}$.

Beispiel 3.50

Wir betrachten die sogenannte Wilkinson-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & & \emptyset & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & -1 & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty = 1$ und somit $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = n$.

Beispiel 3.50

Wir betrachten die sogenannte Wilkinson-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & & \emptyset & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & -1 & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty = 1$ und somit $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = n$.
Betrachte $Ax = b$, mit $x_i = (\sqrt{2})^i$, $i = 1, \dots, n$.
Lösen dieses Gleichungssystem mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung und $\mathrm{eps} \approx 10^{-16}$. Berechnete Lösung $\tilde{x}$ hat Fehler:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.2 \cdot 10^{-8} \text{ für } n = 30, \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.9 \cdot 10^{-2} \text{ für } n = 50.$$

Beispiel 3.50

Also in diesem Fall: Gauß-Elimination mit Pivotisierung nicht stabil.

Bei der Durchführung der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung werden keine Zeilen vertauscht, weil ein betragsgrößtes Pivotelement bereits auf der Diagonale steht. Die sich ergebenden Matrizen sind

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & \\ \mathbf{-1} & \ddots & & \boldsymbol{\emptyset} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \mathbf{-1} & \ddots & \\ \mathbf{-1} & \dots & \dots & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{1} & & \boldsymbol{\emptyset} & \mathbf{2} \\ & & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ & \boldsymbol{\emptyset} & & \mathbf{1} & \vdots \\ & & & & \mathbf{2^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.50

Also in diesem Fall: Gauß-Elimination mit Pivotisierung nicht stabil.

Bei der Durchführung der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung werden keine Zeilen vertauscht, weil ein betragsgrößtes Pivotelement bereits auf der Diagonale steht. Die sich ergebenden Matrizen sind

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & \\ \mathbf{-1} & \ddots & & \boldsymbol{\emptyset} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \mathbf{-1} & \ddots & \\ \mathbf{-1} & \dots & \dots & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{1} & & \boldsymbol{\emptyset} & \mathbf{2} \\ & & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ & \boldsymbol{\emptyset} & & \mathbf{1} & \vdots \\ & & & & \mathbf{2^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Der Wachstumsfaktor ist maximal: $\boldsymbol{\rho_n(A) = 2^{n-1}}$.

Nachiteration

Ziel: genaue(re) Approximation der Lösung $\boldsymbol{x}$ des Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Ausgangspunkt: bereits berechnete Zerlegung $\boldsymbol{PA} \approx \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{R}}$, z.B. mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung, und berechnete Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{x}$.

Für $\boldsymbol{e}^{\mathbf{0}} := \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$ gilt

$$\boldsymbol{Ae}^{\mathbf{0}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} =: \boldsymbol{r} \quad \text{(Residuum)}$$

Nachiteration

Ziel: genaue(re) Approximation der Lösung $\boldsymbol{x}$ des Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Ausgangspunkt: bereits berechnete Zerlegung $\boldsymbol{PA} \approx \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{R}}$, z.B. mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung, und berechnete Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{x}$.

Für $\boldsymbol{e}^0 := \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$ gilt

$$\boldsymbol{Ae}^0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} =: \boldsymbol{r} \quad \text{(Residuum)}$$

Verfahren

Gegeben $\boldsymbol{x}^0 = \tilde{\boldsymbol{x}}$. Für $k = 0, 1, 2, \ldots$, berechne:

1. Residuumauswertung $\boldsymbol{r}^k := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}^k$; *das Ergebnis ist* $\tilde{\boldsymbol{r}}^k$.
2. Lösen der Gleichung $\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{e}}^k = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{r}}^k$; *das Ergebnis ist* $\tilde{\boldsymbol{e}}^k$.
3. Korrekturschritt $\boldsymbol{x}^{k+1} := \boldsymbol{x}^k \oplus \tilde{\boldsymbol{e}}^k$.

Nachiteration

Zwei Möglichkeiten in Schritt 1:

(a): mit (standard) Maschinengenauigkeit eps (“feste Genauigkeit”)

(b): mit Maschinengenauigkeit $\mathrm{eps}^{\mathbf{2}}$ (“doppelte Genauigkeit”)

Nachiteration

Zwei Möglichkeiten in Schritt 1:
(a): mit (standard) Maschinengenauigkeit eps ("feste Genauigkeit")
(b): mit Maschinengenauigkeit $\mathrm{eps}^{\mathbf{2}}$ ("doppelte Genauigkeit")

Nachiteration mit fester Genauigkeit

Gauß-Elimination mit Pivotisierung + Nachiteration hat eine bessere Stabilität als (nur) die Gauß-Elimination mit Pivotisierung. Oft wird bereits nach einem Nachiterationsschritt die Größenordnung des unvermeidbaren Fehlers $\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\kappa}_{\infty}(\boldsymbol{A})\mathrm{eps})$ erreicht.

Nachiteration

Zwei Möglichkeiten in Schritt 1:
(a): mit (standard) Maschinengenauigkeit eps (“feste Genauigkeit”)
(b): mit Maschinengenauigkeit eps^2 (“doppelte Genauigkeit”)

Nachiteration mit fester Genauigkeit

Gauß-Elimination mit Pivotisierung + Nachiteration hat eine bessere Stabilität als (nur) die Gauß-Elimination mit Pivotisierung. Oft wird bereits nach einem Nachiterationsschritt die Größenordnung des unvermeidbaren Fehlers $\mathcal{O}(\kappa_\infty(A)\mathrm{eps})$ erreicht.

Nachiteration mit doppelter Genauigkeit

Diese Methode bietet eine effiziente Möglichkeit um in Fällen mit einer extrem großen Konditionszahl (z.B. $\kappa_\infty(A) \sim \mathrm{eps}^{-1}$) die Genauigkeit der mit der Gauß-Eliminationsmethode berechneten Lösung erheblich zu verbessern.

Beispiel 3.56

Wir betrachten $Ax = b$ mit der Wilkinson-Matrix aus Bespiel 3.50.
Lösung: $x_i = (\sqrt{2})^i$, $i = 1, \ldots, n$.
Lösen dieses Gleichungssystem mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung und $\mathrm{eps} \approx 10^{-16}$. Berechnete Lösung $\tilde{x}$ hat Fehler (Beispiel 3.50):

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.2 \cdot 10^{-8} \text{ für } n = 30, \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.9 \cdot 10^{-2} \text{ für } n = 50.$$

Beispiel 3.56

Wir betrachten $Ax = b$ mit der Wilkinson-Matrix aus Bespiel 3.50.
Lösung: $x_i = (\sqrt{2})^i$, $i = 1, \dots, n$.
Lösen dieses Gleichungssystem mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung und $\mathrm{eps} \approx 10^{-16}$. Berechnete Lösung $\tilde{x}$ hat Fehler (Beispiel 3.50):

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.2{\cdot}10^{-8} \text{ für } n = 30, \; \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.9{\cdot}10^{-2} \text{ für } n = 50.$$

Kombiniert mit einem Nachiterationsschritt liefert x^1 mit Fehler:

$$\frac{\|x - x^1\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.1{\cdot}10^{-16} \;\; n = 30, \; \frac{\|x - x^1\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.1{\cdot}10^{-16} \;\; n = 50.$$

Der zusätzliche Aufwand zur Berechnung von x^1 ist nur $\mathcal{O}(n^2)$ Flop (Matrix-Vektor Berechnung und Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen).

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
  $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq 0)$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
  $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{T}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
  $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{T}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix
- QR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{Q}$ orthogonale Matrix

Orthogonale Matrizen

Definition

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt orthogonal, falls

$$Q^T Q = I.$$

Das bedeutet,

- die Spalten von Q bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^m$;
- die Inverse von Q ist einfach zu bestimmen

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Orthogonale Matrizen

QR-Zerlegung

Gegeben sei eine rechteckige Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, bestimme eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}.$$

- Lösung eines linear Gleichungssystems ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär)

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Orthogonale Matrizen

QR-Zerlegung

Gegeben sei eine rechteckige Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, bestimme eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}.$$

- Lösung eines linear Gleichungssystems ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär)

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Orthogonale Matrizen

QR-Zerlegung

Gegeben sei eine rechteckige Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, bestimme eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so dass

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}.$$

- Lösung eines linear Gleichungssystems ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär)

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{Q}^T\,\boldsymbol{b}}_{\text{Matrix-Vektor-Produkt}}}_{\text{Rückwärtseinsetzen}}$$

Orthogonale Matrizen

QR-Zerlegung

Gegeben sei eine rechteckige Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, bestimme eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}.$$

- Lösung eines linear Gleichungssystems ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär)

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{b}}_{\text{Matrix-Vektor-Produkt}}}_{\text{Rückwärtseinsetzen}}$$

- QR-Zerlegung auch für rechteckige Matrizen durchführbar.

Satz 3.57

Sei $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ orthogonal, dann gilt:

(i) $\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{T}}$ ist orthogonal.

Satz 3.57

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, dann gilt:

(i) Q^T ist orthogonal.

(ii) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Satz 3.57

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, dann gilt:

(i) Q^T ist orthogonal.

(ii) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\kappa_2(Q) = 1$.

Satz 3.57

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, dann gilt:

(i) Q^T ist orthogonal.

(ii) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\kappa_2(Q) = 1$.

(iv) Für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbb{N}$ beliebig, gilt $\|A\|_2 = \|QA\|_2 = \|AQ\|_2$.

Satz 3.57

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, dann gilt:

(i) Q^T ist orthogonal.

(ii) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\kappa_2(Q) = 1$.

(iv) Für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbb{N}$ beliebig, gilt $\|A\|_2 = \|QA\|_2 = \|AQ\|_2$.

(v) Es gilt (für A wie vorhin) $\kappa_2(A) = \kappa_2(QA) = \kappa_2(AQ)$.

Satz 3.57

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, dann gilt:

(i) Q^T ist orthogonal.

(ii) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\kappa_2(Q) = 1$.

(iv) Für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbb{N}$ beliebig, gilt $\|A\|_2 = \|QA\|_2 = \|AQ\|_2$.

(v) Es gilt (für A wie vorhin) $\kappa_2(A) = \kappa_2(QA) = \kappa_2(AQ)$.

(vi) Sei $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, dann ist $Q\tilde{Q}$ orthogonal.

Vergleich LR- und QR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Wir haben

$$\boldsymbol{L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = R}$$

Vergleich LR- und QR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Wir haben

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = R$$

und damit

$$A = L\,R$$

Vergleich LR- und QR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Wir haben

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = R$$

und damit

$$A = L\,R$$

mit

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$$

einer unteren Dreiecksmatrix.

Vergleich LR- und QR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Wir haben

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = R$$

und damit

$$A = L\,R$$

mit

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$$

einer unteren Dreiecksmatrix.

QR-Zerlegung

Wir haben

Vergleich LR- und QR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Wir haben

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = R$$

und damit

$$A = L\, R$$

mit

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$$

einer unteren Dreiecksmatrix.

QR-Zerlegung

Wir haben

$$Q_{n-1} \cdots Q_2 Q_1 A = R$$

Vergleich LR- und QR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Wir haben

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = R$$

und damit

$$A = L\,R$$

mit

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$$

einer unteren Dreiecksmatrix.

QR-Zerlegung

Wir haben

$$Q_{n-1} \cdots Q_2 Q_1 A = R$$

und damit

$$A = Q\,R$$

Vergleich LR- und QR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Wir haben

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = R$$

und damit

$$A = L\,R$$

mit

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$$

einer unteren Dreiecksmatrix.

QR-Zerlegung

Wir haben

$$Q_{n-1} \cdots Q_2 Q_1 A = R$$

und damit

$$A = Q\,R$$

mit

$$\begin{aligned} Q &= Q_1^{-1} Q_2^{-1} \cdots Q_{n-1}^{-1} \\ &= Q_1^T Q_2^T \cdots Q_{n-1}^T \end{aligned}$$

einer orthogonalen Matrix.

Berechnung der QR-Zerlegung

Wir haben mehrere Möglichkeiten:

Berechnung der QR-Zerlegung

Wir haben mehrere Möglichkeiten:

- **Gram-Schmidt Orthogonalisierung**
  Idee: Schrittweise Orthogonalisierung der Spalten von $\boldsymbol{A}$

Berechnung der QR-Zerlegung

Wir haben mehrere Möglichkeiten:

- **Gram-Schmidt Orthogonalisierung**

  Idee: Schrittweise Orthogonalisierung der Spalten von $\boldsymbol{A}$

- **Givens-Rotation**

  Idee: Schrittweise ebene Drehungen der Spalten von $\boldsymbol{A}$

Berechnung der QR-Zerlegung

Wir haben mehrere Möglichkeiten:

- **Gram-Schmidt Orthogonalisierung**

  Idee: Schrittweise Orthogonalisierung der Spalten von $\boldsymbol{A}$

- **Givens-Rotation**

  Idee: Schrittweise ebene Drehungen der Spalten von $\boldsymbol{A}$

- **Householder-Transformation**

  Idee: Schrittweise Spiegelungen der Spalten von $\boldsymbol{A}$

Givens-Rotationen

Grundaufgabe

Gegeben sei $(a,b)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Finde $c, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$c^2 + s^2 = 1.$$

Givens-Rotationen

Grundaufgabe

Gegeben sei $(a, b)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Finde $c, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$c^2 + s^2 = 1.$$

Die Lösung ist: $r = \pm\sqrt{a^2 + b^2}, \quad c := \frac{a}{r}, \quad s := \frac{b}{r}$

Givens-Rotationen

Grundaufgabe

Gegeben sei $(a,b)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Finde $c, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$c^2 + s^2 = 1.$$

Die Lösung ist: $r = \pm\sqrt{a^2+b^2}, \quad c := \frac{a}{r}, \quad s := \frac{b}{r}$

Beachte

Drehung verändert nicht die Euklidische Länge eines Vektors, d.h.

$$\|(r,0)^T\|_2 = |r| = \sqrt{a^2+b^2} = \|(a,b)^T\|_2.$$

Givens-Rotationen

Grundaufgabe

Gegeben sei $(a, b)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Finde $c, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$c^2 + s^2 = 1.$$

Die Lösung ist: $r = \pm\sqrt{a^2 + b^2}, \quad c := \frac{a}{r}, \quad s := \frac{b}{r}$

Beachte

Drehung verändert nicht die Euklidische Länge eines Vektors, d.h.

$$\|(r, 0)^T\|_2 = |r| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)^T\|_2.$$

- Die obige (Rotations-)Matrix ist orthogonal.

Givens-Rotations-Matrix

Die orthogonale Matrix $G_{i,k} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist gegeben durch

$$
G_{i,k} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i\downarrow & & & & k\downarrow & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & c & 0 & \cdots & 0 & s & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\
 & & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & -s & 0 & \cdots & 0 & c & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Givens-Rotations-Matrix

... und damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & c & 0 & \cdots & 0 & s & & & \\ & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\ & & & -s & 0 & \cdots & 0 & c & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ r \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ 0 \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

für $\quad r = \pm\sqrt{{x_i}^2 + {x_k}^2}, \quad c = x_i/r, \quad s = x_k/r.$

Beispiel 3.59

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.59

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \color{blue}{\mathbf{-3}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \overset{\boldsymbol{G_{1,2}}}{\rightsquigarrow}$$

mit

Beispiel 3.59

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow}$$

mit

$$G_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Beispiel 3.59

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \overset{G_{1,2}}{\leadsto} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

mit

$$G_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Beispiel 3.59

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow}$$

mit

$$G_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ und}$$

Beispiel 3.59

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow}$$

mit

$$G_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ und } G_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{26}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{26}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.59

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \sqrt{26} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$G_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ und } G_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{26}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{26}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{*} & * & * \\ \color{blue}{*} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{*} & * & * \\ \color{blue}{*} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{\boldsymbol{G_{1,2}}}{\leadsto}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $\boldsymbol{G_{i,k}}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{*} & * & * \\ \color{blue}{*} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\leadsto}{G_{1,2}} \begin{pmatrix} \color{blue}{\circledast} & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ \color{blue}{*} & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\leadsto}{G_{1,3}}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & * & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{2,3}}{\rightsquigarrow}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $\boldsymbol{G_{i,k}}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{1,2}} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{1,3}} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & * & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{2,3}} \begin{pmatrix} * & * & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $\boldsymbol{G_{i,k}}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & * & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{2,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$
\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}
\overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow}
\begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}
\overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow}
\begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}
\overset{G_{2,3}}{\rightsquigarrow}
\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow}
\begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & \circledast & \circledast \end{pmatrix}
$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{1,2}} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{1,3}} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{2,3}} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{G_{1,4}} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & \circledast & \circledast \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{2,4}}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{2,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & \circledast & \circledast \end{pmatrix} \overset{G_{2,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \circledast \end{pmatrix}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & * & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{2,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \end{pmatrix} \overset{G_{2,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ \mathbf{0} & \circledast & \circledast \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \circledast \end{pmatrix} \overset{G_{3,4}}{\rightsquigarrow}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{2,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & \circledast & \circledast \end{pmatrix} \overset{G_{2,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \circledast \end{pmatrix} \overset{G_{3,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & \circledast \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.

Beispiel 3.61

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{1,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix} \overset{G_{2,3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & \circledast \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & \circledast & \circledast \end{pmatrix} \overset{G_{2,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \circledast & \circledast \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \circledast \end{pmatrix} \overset{G_{3,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & \circledast \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Mit $\circledast$ werden die Einträge angedeutet, die bei der Anwendung von $G_{i,k}$ neu berechnet werden müssen.
- Die Reihenfolge $G_{1,2}, G_{1,3}, G_{1,4}, G_{2,3}, G_{2,4}, G_{3,4}$ wäre auch möglich.

Beispiel 3.62

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.62

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \overset{\boldsymbol{G_{1,4}}}{\rightsquigarrow}$$

Beispiel 3.62

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \underset{\leadsto}{G_{1,4}}$$

wobei

$$G_{1,4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

Beispiel 3.62

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wobei

$$G_{1,4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

Beispiel 3.62

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ {\color{blue}4} & 5 \end{pmatrix} \overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & {\color{blue}-1} \end{pmatrix} \overset{G_{2,4}}{\rightsquigarrow}$$

wobei

$$G_{1,4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{ und}$$

Beispiel 3.62

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \overset{G_{1,4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{G_{2,4}}{\rightsquigarrow}$$

wobei

$$G_{1,4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{ und } G_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.62

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{1,4}} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{G_{2,4}} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$G_{1,4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{ und } G_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

QR-Zerlegung über Givens-Rotation

Die obige Konstruktion mit Givens-Rotationen zeigt, dass für jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine QR-Zerlegung existiert.

Satz 3.63

Gegeben sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Dann existiert eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}.$$

Merke:

Bei der Implementierung der QR-Zerlegung über Givens-Rotation werden die Matrizen $\boldsymbol{G}_{i,k}$ nie explizit berechnet.

QR-Zerlegung über Givens-Rotation

Die obige Konstruktion mit Givens-Rotationen zeigt, dass für jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine QR-Zerlegung existiert.

Satz 3.47.

Gegeben sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann existiert eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}.$$

Merke:

Bei der Implementierung der QR-Zerlegung über Givens-Rotation werden die Matrizen $\boldsymbol{G}_{i,k}$ nie explizit berechnet.

Givens-Rotation: Zusammenfassung

QR-Zerlegung über Givens-Rotationen:

- Das Verfahren ist sehr stabil. Pivotisierung ist nicht erforderlich.

Givens-Rotation: Zusammenfassung

QR-Zerlegung über Givens-Rotationen:

- Das Verfahren ist sehr stabil. Pivotisierung ist nicht erforderlich.
- Durch Berücksichtigung von schon vorhandenen $\mathbf{0}$-Einträgen bei dünnbesetzten Matrizen läßt sich das Verfahren flexibel an die Struktur einer Matrix anpassen.

Givens-Rotation: Zusammenfassung

QR-Zerlegung über Givens-Rotationen:

- Das Verfahren ist sehr stabil. Pivotisierung ist nicht erforderlich.
- Durch Berücksichtigung von schon vorhandenen $\mathbf{0}$-Einträgen bei dünnbesetzten Matrizen läßt sich das Verfahren flexibel an die Struktur einer Matrix anpassen.
- Der Aufwand für die QR-Zerlegung einer vollbesetzten $m \times n$-Matrix über Givens-Rotationen beträgt etwa
  $2n^3$ Flop, falls $m = n$, und etwa $3mn^2$ Flop, falls $m \gg n$.
  Zu beachten ist aber, dass für dünnbesetzte Matrizen der Aufwand wesentlich niedriger ist.

Givens-Rotation: Zusammenfassung

QR-Zerlegung über Givens-Rotationen:

- Das Verfahren ist sehr stabil. Pivotisierung ist nicht erforderlich.
- Durch Berücksichtigung von schon vorhandenen 0-Einträgen bei dünnbesetzten Matrizen läßt sich das Verfahren flexibel an die Struktur einer Matrix anpassen.
- Der Aufwand für die QR-Zerlegung einer vollbesetzten $m \times n$-Matrix über Givens-Rotationen beträgt etwa
  $2n^3$ Flop, falls $m = n$, und etwa $3mn^2$ Flop, falls $m \gg n$.
  Zu beachten ist aber, dass für dünnbesetzte Matrizen der Aufwand wesentlich niedriger ist.
- Bei der sogenannten schnellen Givens-Rotation wird der Aufwand etwa ein Drittel geringer:
  $\sim \frac{4}{3}n^3$ Flop, falls $n = m$; $\sim 2mn^2$, Flop falls $m \gg n$.

Berechnung der QR-Zerlegung

Wir haben mehrere Möglichkeiten:

- **Gram-Schmidt Orthogonalisierung**

  Idee: Schrittweise Orthogonalisierung der Spalten von $\boldsymbol{A}$

- **Givens-Rotation**

  Idee: Schrittweise ebene Drehungen der Spalten von $\boldsymbol{A}$

- **Householder-Transformation**

  Idee: Schrittweise Spiegelungen der Spalten von $\boldsymbol{A}$

Householder-Transformationen

Definition

Für $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ ist die Householder- Transformation definiert als

$$Q_v = I - 2\,\frac{v\,v^T}{v^T\,v},$$

wobei die Dyade, $v\,v^T$, gegeben ist durch

$$v\,v^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot (v_1, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & \ldots & v_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n v_1 & \ldots & v_n v_n \end{pmatrix}.$$

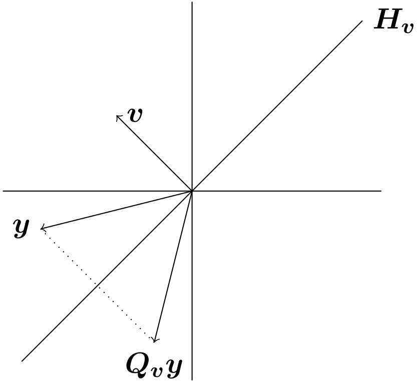
- Die Householder Transformation Q_v ist orthogonal, d.h.

$$Q_v^T Q_v = I, \quad Q_v^{-1} = Q_v^T$$

Householder-Transformationen

Geometrische Interpretation: Spiegelung

$$\boldsymbol{H_v} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{v} = 0\}$$



Householder-Transformationen

Eigenschaften 3.66

- $Q_v = Q_v^T$ symmetrisch, da $(vv^T)^T = vv^T$

Householder-Transformationen

Eigenschaften 3.66

- $Q_v = Q_v^T$ symmetrisch, da $(vv^T)^T = vv^T$
- Q_v^2

Householder-Transformationen

Eigenschaften 3.66

- $Q_v = Q_v^T$ symmetrisch, da $(vv^T)^T = vv^T$
- $Q_v^2 = I$

  Zweimalige Spiegelung ergibt den ursprünglichen Punkt.
- $Q_{\alpha v} = \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq 0$

Householder-Transformationen

Eigenschaften 3.66

- $Q_v = Q_v^T$ symmetrisch, da $(vv^T)^T = vv^T$
- $Q_v^2 = I$

  Zweimalige Spiegelung ergibt den ursprünglichen Punkt.
- $Q_{\alpha v} = Q_v, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

  Skalierung des Normalenvektors ändert nicht die Spiegelebene.
- $Q_v y = y$

Householder-Transformationen

Eigenschaften 3.66

- $Q_v = Q_v^T$ symmetrisch, da $(vv^T)^T = vv^T$
- $Q_v^2 = I$

  Zweimalige Spiegelung ergibt den ursprünglichen Punkt.
- $Q_{\alpha v} = Q_v, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

  Skalierung des Normalenvektors ändert nicht die Spiegelebene.
- $Q_v y = y \iff y^T v = 0$

  Urspünglicher und gespiegelter Punkt sind nur identisch, wenn der Punkt in der Spiegelebene liegt.
- $Q_v v$

Householder-Transformationen

Eigenschaften 3.66

- $Q_v = Q_v^T$ symmetrisch, da $(vv^T)^T = vv^T$
- $Q_v^2 = I$

  Zweimalige Spiegelung ergibt den ursprünglichen Punkt.
- $Q_{\alpha v} = Q_v, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

  Skalierung des Normalenvektors ändert nicht die Spiegelebene.
- $Q_v y = y \iff y^T v = 0$

  Urspünglicher und gespiegelter Punkt sind nur identisch, wenn der Punkt in der Spiegelebene liegt.
- $Q_v v = -v.$

  Spiegelung des Normalenvektors vertauscht das Vorzeichen.

Householder-Transformationen

Grundaufgabe

Zu $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{y} \notin \operatorname{span}(\boldsymbol{e}^{\mathbf{1}})$, finde $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass gilt:

$$\boldsymbol{Q_v y} = \pm \|\boldsymbol{y}\|_{\mathbf{2}} \boldsymbol{e}^{\mathbf{1}}$$

Householder-Transformationen

Grundaufgabe

Zu $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{y} \notin \operatorname{span}(\boldsymbol{e}^{\mathbf{1}})$, finde $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass gilt:

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{y} = \pm\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbf{2}}\boldsymbol{e}^{\mathbf{1}}$$

- Die Lösung der Grundaufgabe ist:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} \pm \|\boldsymbol{y}\|_{\mathbf{2}}\boldsymbol{e}^{\mathbf{1}}$$

Householder-Transformationen

Grundaufgabe

Zu $y \in \mathbb{R}^n, y \notin \text{span}(e^1)$, finde $v \in \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

$$Q_v y = \pm \|y\|_2 e^1$$

- Die Lösung der Grundaufgabe ist:

$$v = y \pm \|y\|_2 e^1$$

- Um Auslöschung zu vermeiden, wählt man

$$v = y + \mathbf{sign}(y_1) \|y\|_2 \, e^1, \text{ mit } \mathbf{sign}(0) := 1.$$

Householder-Transformationen

Grundaufgabe

Zu $y \in \mathbb{R}^n, y \notin \mathrm{span}(e^1)$, finde $v \in \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

$$Q_v y = \pm \|y\|_2 e^1$$

- Die Lösung der Grundaufgabe ist:

$$v = y \pm \|y\|_2 e^1$$

- Um Auslöschung zu vermeiden, wählt man

$$v = y + \mathbf{sign}(y_1)\|y\|_2\, e^1, \text{ mit } \mathbf{sign}(0) := 1.$$

Zusammenfassend

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{sign}(y_1)\|y\|_2 \\ v &= y + \alpha e^1 \\ Q_v\, y &= -\alpha e^1 \end{aligned}$$

Beispiel 3.67

Aufgabe

Zu $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ wird $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ gesucht, so dass gilt:

$$\boldsymbol{Q_v y = \pm \|y\|_2 \, e^1 = \pm 3} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.67

Aufgabe

Zu $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$ wird $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ gesucht, so dass gilt:

$$\boldsymbol{Q_v y} = \pm \|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{2}}\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{1}} = \pm\boldsymbol{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

- Wir erhalten $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{3}$, und $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\alpha e}^{\boldsymbol{1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$, und damit

$$\boldsymbol{Q_v y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.67

Zur Berechnung von $\boldsymbol{Q_v y}$ wird die explizite Form von $\boldsymbol{Q_v}$

$$\boldsymbol{Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (5\ 2\ 1)}{(5\ 2\ 1)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{pmatrix}}$$

nicht benötigt.

Beachte

$$\boldsymbol{Q_v w = \left(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\right) w = w - \frac{2v^Tw}{v^Tv} v}$$

Reduktion auf obere Dreiecksform

- Sei a^1 die erste Spalte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.

$$A = A^{(1)}$$

$$\boxed{\begin{matrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{matrix}}$$

Reduktion auf obere Dreiecksform

- Sei a^1 die erste Spalte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.
- Man wendet die Grundaufgabe mit $y = a^1$ an:

$$v^1 = a^1 + \operatorname{sign}(a_{1,1}) \|a^1\|_2 e^1 \;\rightarrow\; Q_1 := Q_{v^1} \;\rightarrow\; Q_1 A$$

$$A = A^{(1)}$$

$$\boxed{\begin{matrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{matrix}}$$

Reduktion auf obere Dreiecksform

- Sei a^1 die erste Spalte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$.
- Man wendet die Grundaufgabe mit $y = a^1$ an:

$$v^1 = a^1 + \mathrm{sign}(a_{1,1})\|a^1\|_2 e^1 \;\rightarrow\; Q_1 := Q_{v^1} \;\rightarrow\; Q_1 A$$

$$\underset{A = A^{(1)}}{\begin{array}{|ccccc|}\hline * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline\end{array}} \;\rightarrow\; \underset{Q_1 A = A^{(2)}}{\begin{array}{|c|cccc|}\hline * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline\end{array}}$$

Reduktion auf obere Dreiecksform

- Sei a^1 die erste Spalte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.
- Man wendet die Grundaufgabe mit $y = a^1$ an:

$$v^1 = a^1 + \operatorname{sign}(a_{1,1}) \|a^1\|_2 e^1 \ \rightarrow \ Q_1 := Q_{v^1} \ \rightarrow \ Q_1 A$$

- Sei $\tilde{a}^{(2),1}$ die erste Spalte der Matrix $\tilde{A}^{(2)}$ ...

$$\begin{array}{c} A = A^{(1)} \\ \begin{array}{|ccccc|} \hline * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} Q_1 A = A^{(2)} \\ \begin{array}{|c|cccc|} \hline * & * & \cdots & \cdots & * \\ \cline{2-5} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Reduktion auf obere Dreiecksform

- Sei a^1 die erste Spalte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.
- Man wendet die Grundaufgabe mit $y = a^1$ an:

$$v^1 = a^1 + \mathrm{sign}(a_{1,1}) \|a^1\|_2 e^1 \;\rightarrow\; Q_1 := Q_{v^1} \;\rightarrow\; Q_1 A$$

- Sei $\tilde{a}^{(2),1}$ die erste Spalte der Matrix $\tilde{A}^{(2)}$ ...

$$
\underset{A = A^{(1)}}{\begin{array}{|ccccc|}\hline * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline\end{array}}
\;\rightarrow\;
\underset{Q_1 A = A^{(2)}}{\begin{array}{|c|cccc|}\hline * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline\end{array}}
\;\rightarrow\;
\underset{Q_2 Q_1 A = A^{(3)}}{\begin{array}{|cc|ccc|}\hline * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \hline\end{array}}
$$

Reduktion auf obere Dreiecksform

- Sei a^1 die erste Spalte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.
- Man wendet die Grundaufgabe mit $y = a^1$ an:

$$v^1 = a^1 + \operatorname{sign}(a_{1,1})\|a^1\|_2 e^1 \;\rightarrow\; Q_1 := Q_{v^1} \;\rightarrow\; Q_1 A$$

- Sei $\tilde{a}^{(2),1}$ die erste Spalte der Matrix $\tilde{A}^{(2)}$ ...

$$A = A^{(1)} \qquad\qquad Q_1 A = A^{(2)} \qquad\qquad Q_2 Q_1 A = A^{(3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right]$$

$Q_{n-1} \dots Q_2 Q_1 A = R$, bzw. $A = Q_1^T Q_2^T \dots Q_{n-1}^T R = QR$

Beispiel 3.68

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformation.

Beispiel 3.68

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformation.

1. Grundaufgabe mit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{1}}$ (erste Spalte von $\boldsymbol{A}$) ergibt

Beispiel 3.68

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformation.

1. Grundaufgabe mit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}^1$ (erste Spalte von $\boldsymbol{A}$) ergibt

$$\boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} + \mathbf{3}\boldsymbol{e}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \to \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}^1}.$$

Beispiel 3.68

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformation.

1. Grundaufgabe mit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{1}}$ (erste Spalte von $\boldsymbol{A}$) ergibt
$$\boldsymbol{v}^{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} + \mathbf{3}\boldsymbol{e}^{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \to \boldsymbol{Q}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}^{\mathbf{1}}}.$$
2. Für die zwei Spalten der Matrix $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{A}$ ergibt sich

Beispiel 3.68

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformation.

1. Grundaufgabe mit $y = a^1$ (erste Spalte von A) ergibt
$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3e^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \to Q_1 = Q_{v^1}.$$
2. Für die zwei Spalten der Matrix $Q_1 A$ ergibt sich
$$Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(per Konstruktion)}$$

Beispiel 3.68

$$Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.68

$$Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{(v^1)^T v^1} v^1 (v^1)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.68

$$\boldsymbol{Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{(v^1)^T v^1} v^1 (v^1)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} v^1}$$

Beispiel 3.68

$$Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{(v^1)^T v^1} v^1 (v^1)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} v^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.68

$$Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{(v^1)^T v^1} v^1 (v^1)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} v^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. Daraus folgt

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.68

$$Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{(v^1)^T v^1} v^1 (v^1)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} v^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. Daraus folgt

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4. Grundaufgabe mit y gleich erster Spalte von $\tilde{A}^{(2)}$, d.h. $y = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})^T$, ergibt

Beispiel 3.68

$$Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{(v^1)^T v^1} v^1 (v^1)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} v^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. Daraus folgt

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4. Grundaufgabe mit y gleich erster Spalte von $\tilde{A}^{(2)}$, d.h. $y = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})^T$, ergibt

$$v^2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(1+\sqrt{2}) \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_{v^2}.$$

Beispiel 3.68

$$\widetilde{Q}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.68

$$\widetilde{Q}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} - \frac{2(v^2)^T \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}{(v^2)^T v^2} v^2$$

Beispiel 3.68

$$\widetilde{Q}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} - \frac{2(v^2)^T \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}{(v^2)^T v^2} v^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Damit ergibt sich

$$\widetilde{Q}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.68

$$\widetilde{Q}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} - \frac{2(v^2)^T \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}{(v^2)^T v^2} v^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Damit ergibt sich

$$\widetilde{Q}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.68

$$\widetilde{Q}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} - \frac{2(v^2)^T \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}{(v^2)^T v^2} v^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Damit ergibt sich

$$\widetilde{Q}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Insgesamt erhält man

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\widetilde{Q}_2} \end{pmatrix}}_{Q_2} Q_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Householder-Transformation: Zusammenfassung

- Die QR-Zerlegung über Householder-Transformationen ist ebenfalls sehr stabil.
- Gesonderte Pivotisierung ist nicht erforderlich.
- Der Aufwand für die QR-Zerlegung einer vollbesetzten $m \times n$-Matrix über Householder-Transformationen ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Flop, falls $m = n$, und etwa $2mn^2$ Flop, falls $m \gg n$.

Wichtige Anwendungen der QR-Zerlegung:

- Ausgleichsrechnung (Kapitel 4 und 6)
- Berechnung von Eigenwerten (Kapitel 7)