

# Kapitel 7

Buch Dahmen-Reusken

RWTH Aachen University

2022

# Problemstellung

## Eigenwertgleichung

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle quadratische Matrix. Man suche eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  und einen Vektor  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $v \neq \mathbf{0}$ , die der **Eigenwertgleichung**

$$Av = \lambda v$$

genügen.

# Problemstellung

## Eigenwertgleichung

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle quadratische Matrix. Man suche eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  und einen Vektor  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $v \neq \mathbf{0}$ , die der **Eigenwertgleichung**

$$Av = \lambda v$$

genügen.

Die Zahl  $\lambda$  heißt **Eigenwert** und der Vektor  $v$  **Eigenvektor** zum Eigenwert  $\lambda$ . Das Eigenwertproblem ist **nicht-linear** in den Unbekannten  $(\lambda, v)$ .

## Beispiel 7.1 (“Eigenschwingungen”)

Gesucht die Zahl  $\lambda$  und die Funktion  $u(x)$ , die die Differentialgleichung

$$-u''(x) - \lambda r(x)u(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllen.

Hierbei ist  $r$  eine bekannte stetige Funktion, mit

$$r(x) > 0, \quad x \in (0, 1).$$

## Beispiel 7.1 (“Eigenschwingungen”)

Gesucht die Zahl  $\lambda$  und die Funktion  $u(x)$ , die die Differentialgleichung

$$-u''(x) - \lambda r(x)u(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllen.

Hierbei ist  $r$  eine bekannte stetige Funktion, mit

$$r(x) > 0, \quad x \in (0, 1).$$

Wir betrachten dazu Gitterpunkte

$$x_j = jh, \quad j = 0, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n}.$$

## Beispiel 7.1

$u''(x_j)$  wird durch die Näherung

$$u_j = \frac{u(x_j+h) - 2u(x_j) + u(x_j-h)}{h^2}, j=1,2,\dots,n-1$$

ersetzt. Es ergibt sich ein Gleichungssystem

$$Au - \lambda Ru = 0$$

für die Unbekannten  $\lambda$  und  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , wobei

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r(x_1) & & & & \\ & r(x_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ \emptyset & & & \ddots & \\ & & & & r(x_{n-2}) \\ & & & & & r(x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

## Beispiel 7.1

Sei

$$R^{1/2} := \text{diag} \left( \sqrt{r(x_1)}, \dots, \sqrt{r(x_{n-1})} \right), R^{-1/2} := (R^{1/2})^{-1},$$

$$v := R^{1/2}u,$$

$$B := R^{-1/2}AR^{-1/2}.$$

Man erhält die transformierte Gleichung

$$Bv = \lambda v,$$

also ein [Eigenwertproblem](#).

## Beispiel 7.3

Ein System linearer gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$z' = Az + b, \quad z(0) = z^0,$$

wobei  $z = z(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .



## Beispiel 7.3

Ein System linearer gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$z' = Az + b, \quad z(0) = z^0,$$

wobei  $z = z(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Annahmen:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^n$  hängen nicht von  $t$  ab und  $A$  ist diagonalisierbar:

$$Av^i = \lambda_i v^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sei

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad V = (v^1 \ v^2 \ \dots \ v^n),$$

und damit

$$AV = V\Lambda.$$

## Beispiel 7.3

So erhält man aus

$$V^{-1}z' = V^{-1}AV \underbrace{V^{-1}z}_{=: y} + \underbrace{V^{-1}b}_{=: c},$$

das System  $y' = \Lambda y + c$  von **entkoppelten** skalaren Gleichungen der Form

$$y'_i = \lambda_i y_i + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## Beispiel 7.3

So erhält man aus

$$V^{-1}z' = V^{-1}AV \underbrace{V^{-1}z}_{=: y} + \underbrace{V^{-1}b}_{=: c},$$

das System  $y' = \Lambda y + c$  von **entkoppelten** skalaren Gleichungen der Form

$$y_i' = \lambda_i y_i + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Hier ergibt sich einfach die Lösung

$$y_i(t) = \tilde{z}_i^0 e^{\lambda_i t} + \frac{c_i}{\lambda_i} (e^{\lambda_i t} - 1), \quad \text{falls } \lambda_i \neq 0,$$

$$y_i(t) = c_i t + \tilde{z}_i^0, \quad \text{falls } \lambda_i = 0,$$

wobei  $\tilde{z}_i^0 := (V^{-1}z^0)_i$ .

# Charakterisierung von Eigenwerten

## Lemma 7.4

$\lambda \in \mathbb{C}$  ist ein Eigenwert von  $A$  genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$\det(A - \lambda I)$  wird das **charakteristische Polynom** genannt.

# Charakterisierung von Eigenwerten

## Lemma 7.4

$\lambda \in \mathbb{C}$  ist ein Eigenwert von  $A$  genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$\det(A - \lambda I)$  wird das **charakteristische Polynom** genannt.

Deshalb:

Berechnung der Eigenwerte



Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda I)$$

# Charakterisierung von Eigenwerten

## Lemma 7.4

$\lambda \in \mathbb{C}$  ist ein Eigenwert von  $A$  genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$\det(A - \lambda I)$  wird das **charakteristische Polynom** genannt.

Deshalb:

Berechnung der Eigenwerte



Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda I)$$

Der Weg über die Nullstellen ist im allgemeinen ein **untaugliches Vorgehen** und nur für sehr kleine  $n$  akzeptabel.

# Eigenschaften des Spektrums

## Definitionen:

Die Menge aller paarweise verschiedenen Eigenwerte

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(A - \lambda I) = 0 \}$$

bezeichnet man als **Spektrum** von  $A$ .

# Eigenschaften des Spektrums

## Definitionen:

Die Menge aller paarweise verschiedenen Eigenwerte

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(A - \lambda I) = 0 \}$$

bezeichnet man als **Spektrum** von  $A$ .

Matrizen  $A$  und  $B$  heißen **ähnlich**, falls es eine nichtsinguläre Matrix  $T$  gibt, so daß

$$B = T^{-1}AT$$

gilt.



## Lemma 7.5

Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann gilt

- (i) Falls  $A$  nichtsingulär ist:  $\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$
- (ii)  $\lambda \in \sigma(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma(A)$ .
- (iii)  $\sigma(A - \mu I) = \{ \lambda - \mu \mid \lambda \in \sigma(A) \}$  für jedes  $\mu \in \mathbb{C}$ .
- (iv)  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ .
- (v)  $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ .
- (vi) Falls  $A$  eine obere oder untere **Dreiecksmatrix** ist:

$$\sigma(A) = \{ a_{i,i} \mid 1 \leq i \leq n \}.$$

- (vii) Es sei  $A$  eine obere oder untere **Block-Dreiecksmatrix** mit quadratischen Diagonalblöcken  $D_{ii}$ ,  $1 \leq i \leq m$ .  
Dann gilt:  $\sigma(A) = \cup_{1 \leq i \leq m} \sigma(D_{ii})$ .

# Ähnliche Matrizen

## Lemma 7.6

Ähnliche Matrizen haben das gleiche Spektrum:

$$\sigma(A) = \sigma(T^{-1}AT)$$

für beliebiges nicht-singuläres  $T$ .

# Ähnliche Matrizen

## Lemma 7.6

Ähnliche Matrizen haben das gleiche Spektrum:

$$\sigma(A) = \sigma(T^{-1}AT)$$

für beliebiges nicht-singuläres  $T$ .

## Beweis

$$\begin{aligned}\det(T^{-1}AT - \lambda I) &= \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(T) \\ &= \det(A - \lambda I).\end{aligned}$$

## Schur-Faktorisierung

## Satz 7.8 (Komplexe Schur-Faktorisierung)

Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gibt es eine unitäre Matrix  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , so dass

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & \emptyset & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: R$$

gilt.

Dabei ist  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \sigma(A)$ .

## Schur-Faktorisierung

## Satz 7.9 (Reelle Schur-Faktorisierung)

Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es eine orthogonale Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ & R_{22} & & \\ & & \ddots & * \\ & & & R_{mm} \end{pmatrix} =: R$$

gilt.

Dabei sind alle Matrizen  $R_{ii}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) reell und besitzen entweder die Ordnung eins ( $R_{ii} \in \mathbb{R}$ ) oder die Ordnung zwei ( $R_{ii} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ).

Im letzteren Fall hat  $R_{ii}$  ein Paar komplex konjugierter Eigenwerten.

Die Menge aller Eigenwerte der Matrizen  $R_{ii}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ist gerade das Spektrum der Matrix  $A$ .

# Schur-Faktorisierung

## Folgerung 7.11

Jede reelle **symmetrische** Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lässt sich mittels einer orthogonalen Matrix  $Q$  **ähnlich** auf Diagonalgestalt bringen:

$$Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

$A$  besitzt somit nur **reelle Eigenwerte** und  **$n$  linear unabhängige zueinander orthogonale** Eigenvektoren

Die Eigenvektoren sind die Spalten von  $Q$ .

# Kondition des Eigenwertproblems

## Satz 7.12

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine diagonalisierbare Matrix:

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Sei  $\mu$  ein Eigenwert der gestörten Matrix  $A + E$ , dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu| \leq \|V\|_p \|V^{-1}\|_p \|E\|_p,$$

mit  $p = 1, 2, \infty$ .

# Kondition des Eigenwertproblems

## Satz 7.12

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine diagonalisierbare Matrix:

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Sei  $\mu$  ein Eigenwert der gestörten Matrix  $A + E$ , dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu| \leq \|V\|_p \|V^{-1}\|_p \|E\|_p,$$

mit  $p = 1, 2, \infty$ .

### Beachte:

Die absolute Kondition der Eigenwerte hängt von der Konditionszahl der Eigenvektormatrix  $V$  und **nicht** von der Konditionszahl der Matrix  $A$  ab.



# Kondition des Eigenwertproblems

Für eine **symmetrische** Matrix ist das Problem der Bestimmung der **Eigenwerte** immer **gut konditioniert**:

## Satz 7.13

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix und  $\mu$  ein Eigenwert der gestörten Matrix  $A + E$ . Dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu| \leq \|E\|_2.$$

# Kondition des Eigenwertproblems

Für eine **symmetrische** Matrix ist das Problem der Bestimmung der **Eigenwerte** immer **gut konditioniert**:

## Satz 7.13

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix und  $\mu$  ein Eigenwert der gestörten Matrix  $A + E$ . Dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu| \leq \|E\|_2.$$

Für nicht-symmetrische Matrizen kann das Problem der Eigenwertbestimmung schlecht konditioniert sein, obgleich  $A$  selbst eine moderate Konditionszahl hat.

## Beispiel 7.14

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

mit Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1 - \alpha, \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 + \alpha, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

## Beispiel 7.14

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

mit Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1 - \alpha, \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 + \alpha, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \leq \frac{4}{1 - \alpha^2},$$

$$\kappa_2(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

## Beispiel 7.14

$$\text{Sei } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^3(2 + \alpha) & 0 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{E}\|_2 = \alpha^3(2 + \alpha).$$

## Beispiel 7.14

$$\text{Sei } E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^3(2 + \alpha) & 0 \end{pmatrix}, \quad \|E\|_2 = \alpha^3(2 + \alpha).$$

Die gestörte Matrix

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2(1 + \alpha)^2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte

$$\mu_1 = 1 - \alpha(1 + \alpha) = \lambda_1 - \alpha^2,$$

$$\mu_2 = 1 + \alpha(1 + \alpha) = \lambda_2 + \alpha^2,$$

## Beispiel 7.14

$$\text{Sei } E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^3(2 + \alpha) & 0 \end{pmatrix}, \quad \|E\|_2 = \alpha^3(2 + \alpha).$$

Die gestörte Matrix

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2(1 + \alpha)^2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte

$$\mu_1 = 1 - \alpha(1 + \alpha) = \lambda_1 - \alpha^2,$$

$$\mu_2 = 1 + \alpha(1 + \alpha) = \lambda_2 + \alpha^2,$$

also gilt

$$|\mu_i - \lambda_i| = \alpha^2 = \frac{1}{2 + \alpha} \frac{\alpha^3(2 + \alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2 + \alpha} \kappa_2(V) \|E\|_2.$$

# Eigenwertabschätzungen

## Satz 7.15

Für alle  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  gilt

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|.$$



## Eigenwertabschätzungen

## Satz 7.15

Für alle  $\lambda \in \sigma(A)$  gilt

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

## Satz 7.16

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalisierbar:  $V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Sei  $(\mu, w)$  eine Approximation einer Lösung des Eigenwertproblems mit

$$\frac{\|Aw - \mu w\|_p}{\|w\|_p} \leq \varepsilon, \quad p = 1, 2, \text{ oder } \infty.$$

Dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\mu - \lambda_i| \leq \|V\|_p \|V^{-1}\|_p \varepsilon.$$

# Eigenwertabschätzungen

## Satz 7.17

Seien

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

die sogenannten **Gerschgorin-Kreise**. Dann gilt, dass alle Eigenwerte von  $A$  in der Vereinigung aller dieser Kreise liegen:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i.$$

## Eigenwertabschätzungen

## Folgerung 7.18

Seien  $K_i^T$  die Gerschgorin-Kreise für  $A^T$ :

$$K_i^T := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dann gilt

$$\sigma(A) \subseteq \left( \left( \bigcup_{i=1}^n K_i \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^n K_i^T \right) \right).$$

## Eigenwertabschätzungen

## Folgerung 7.18

Seien  $K_i^T$  die Gerschgorin-Kreise für  $A^T$ :

$$K_i^T := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dann gilt

$$\sigma(A) \subseteq \left( \left( \bigcup_{i=1}^n K_i \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^n K_i^T \right) \right).$$

Falls  $A$  symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell, also gilt:

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n (K_i \cap \mathbb{R}).$$

## Beispiel 7.19

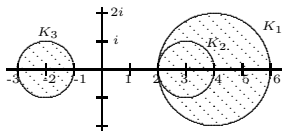
Die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

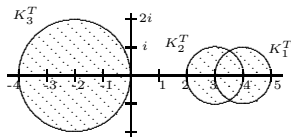
hat das Spektrum  $\sigma(A_1) = \{3.43 \pm 0.14i, -1.86\}$ .

Gerschgorin-Kreise der Matrix  $A_1$ 

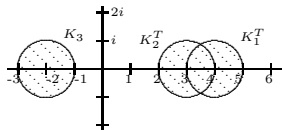
$$\sigma(A) \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^3 K_i \right):$$



$$\sigma(A) \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^3 K_i^T \right):$$



$$\sigma(A) \subseteq \left( \left( \bigcup_{i=1}^3 K_i \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^3 K_i^T \right) \right):$$



## Beispiel 7.19

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

hat das Spektrum  $\sigma(A) = \{1.27, 3.00, 4.73\}$ .

## Beispiel 7.19

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

hat das Spektrum  $\sigma(A) = \{1.27, 3.00, 4.73\}$ .

Die Gerschgorin-Kreise liefern

$$\sigma(A) \subset ([1, 3] \cup [1, 5] \cup [3, 5]),$$

also  $\sigma(A) \subset [1, 5]$ .



# Rayleigh-Quotient

Sei  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$ . Das eindeutige Minimum der Funktion

$$\xi \rightarrow \|A\tilde{v} - \xi\tilde{v}\|_2^2$$

ist

$$\xi_{\min} = r(\tilde{v}) := \frac{\tilde{v}^T A \tilde{v}}{\|\tilde{v}\|_2^2} \quad (\text{Rayleigh-Quotient})$$

## Rayleigh-Quotient

Sei  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$ . Das eindeutige Minimum der Funktion

$$\xi \rightarrow \|A\tilde{v} - \xi\tilde{v}\|_2^2$$

ist

$$\xi_{\min} = r(\tilde{v}) := \frac{\tilde{v}^T A \tilde{v}}{\|\tilde{v}\|_2^2} \quad (\text{Rayleigh-Quotient})$$

Abstand zu dem vom Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  aufgespannten Unterraum  $\langle v \rangle := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ :

$$d(w, \langle v \rangle) := \frac{\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|w - \alpha v\|_2}{\|w\|_2}$$

## Rayleigh-Quotient

## Lemma 7.20

Es seien  $(v, \lambda)$  ein Eigenpaar,  $Av = \lambda v$ , und  $\tilde{v} \neq 0$  eine Approximation des Eigenvektors  $v$ , mit

$$d(\tilde{v}, \langle v \rangle) =: \delta < 1.$$

Für den Rayleigh-Quotienten gilt

$$|r(\tilde{v}) - \lambda| \leq \delta \|A\|_2 (1 + 2\delta),$$

$$|r(\tilde{v}) - \lambda| \leq 2\delta^2 \|A\|_2, \text{ falls } A \text{ symmetrisch ist.}$$

## Rayleigh-Quotient

## Lemma 7.20

Es seien  $(v, \lambda)$  ein Eigenpaar,  $Av = \lambda v$ , und  $\tilde{v} \neq 0$  eine Approximation des Eigenvektors  $v$ , mit

$$d(\tilde{v}, \langle v \rangle) =: \delta < 1.$$

Für den Rayleigh-Quotienten gilt

$$|r(\tilde{v}) - \lambda| \leq \delta \|A\|_2 (1 + 2\delta),$$

$$|r(\tilde{v}) - \lambda| \leq 2\delta^2 \|A\|_2, \text{ falls } A \text{ symmetrisch ist.}$$

Sei  $(\tilde{v}^k)_{k \geq 1}$  eine Folge von Annäherungen eines Eigenvektors  $v$ . Falls  $d(\tilde{v}_k, \langle v \rangle) =: \delta_k \leq c\gamma^k$ , mit  $0 < \gamma < 1$  (lineare Konvergenz), gilt, erwartet man für die Folge  $(r(\tilde{v}^k))_{k \geq 1}$  eine **lineare Konvergenz mit demselben Faktor  $\gamma$** . Falls  $A = A^T$  wird der **Konvergenzfaktor quadriert**.

# Nullstellen des charakteristischen Polynoms

**Beispiel 7.21.** Man betrachte die Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}), \quad \text{mit } a_{1,1} > a_{2,2} \geq \dots \geq a_{n,n} \geq 0.$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_i = a_{i,i}$ , mit Eigenvektoren  $v^i = e^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Annahme: das **charakteristische Polynom**

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (a_{i,i} - \lambda)$$

liegt in der **monomialen Darstellung** vor:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0,$$

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

## Beispiel 7.21

Leicht gestörtes Polynom

$$\tilde{p}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

mit  $\tilde{\alpha}_{n-1} \approx \alpha_{n-1}$ .

Sei  $\tilde{\lambda}_1$  die (betragsmäßig) größte Nullstelle von  $\tilde{p}_A$ .

## Fehlerverstärkung

Es gilt

$$|\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1| \doteq \frac{\lambda_1^{n-1}}{\prod_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i)} |\tilde{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1}|$$

## Beispiel 7.21

Leicht gestörtes Polynom

$$\tilde{p}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

mit  $\tilde{\alpha}_{n-1} \approx \alpha_{n-1}$ .

Sei  $\tilde{\lambda}_1$  die (betragsmäßig) größte Nullstelle von  $\tilde{p}_A$ .

## Fehlerverstärkung

Es gilt

$$|\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1| \doteq \frac{\lambda_1^{n-1}}{\prod_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i)} |\tilde{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1}|$$

Der Fehlerverstärkungsfaktor  $\frac{\lambda_1^{n-1}}{\prod_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i)}$  kann, insbesondere für große  $n$ -Werte, sehr groß sein, z.B. wenn  $\lambda_1 \gg 1$  und  $\lambda_1 - \lambda_i \leq 1$ ,  $i \geq 2$ .

## Beispiel 7.22

Man betrachte die Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}), \quad a_{1,1} = 3.1, \quad a_{i,i} = 3, \quad 2 \leq i \leq n.$$

$$p_A(\lambda) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k, \quad \text{mit } \alpha_0 = 3.1 \cdot 3^{n-1}, \quad \alpha_n = (-1)^n,$$

$$\alpha_k = (-1)^k 3^{n-1-k} \left( 3.1 \binom{n-1}{k} + 3 \binom{n-1}{k-1} \right), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Nullstellen des Polynoms werden mit der Matlab Routine `roots` berechnet.



## Beispiel 7.22

Man betrachte die Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}), \quad a_{1,1} = 3.1, \quad a_{i,i} = 3, \quad 2 \leq i \leq n.$$

$$p_A(\lambda) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k, \quad \text{mit } \alpha_0 = 3.1 \cdot 3^{n-1}, \quad \alpha_n = (-1)^n,$$

$$\alpha_k = (-1)^k 3^{n-1-k} \left( 3.1 \binom{n-1}{k} + 3 \binom{n-1}{k-1} \right), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Nullstellen des Polynoms werden mit der Matlab Routine `roots` berechnet.

Ergebnisse  $\tilde{\lambda}_1 \approx \lambda_1 = 3.1$  und  $F_n := \frac{\lambda_1^{n-1}}{\prod_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i)}$ :

$n$	3	5	7	9
$ \lambda_1 - \tilde{\lambda}_1 $	2.5e-13	2.3e-8	3.1e-5	4.4e-2
$F_n$	9.6e+2	9.2e+5	8.9e+8	8.5e+11

## Nullstellen eines Polynoms als Eigenwerte der Begleitmatrix

Aufgabe: man bestimme die Nullstellen eines Polynoms

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

mit reellen Koeffizienten und  $a_n = 1$ .

Begleitmatrix

$$A_{P_n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ \emptyset & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

## Nullstellen eines Polynoms als Eigenwerte der Begleitmatrix

Es gilt:

$$\det(A_{P_n} - xI) = P_n(x), \quad x \in \mathbb{C},$$
$$x^* \text{ Nullstelle von } P_n \Leftrightarrow x^* \in \sigma(A_{P_n})$$

# Nullstellen eines Polynoms als Eigenwerte der Begleitmatrix

Es gilt:

$$\det(A_{P_n} - xI) = P_n(x), \quad x \in \mathbb{C},$$
$$x^* \text{ Nullstelle von } P_n \Leftrightarrow x^* \in \sigma(A_{P_n})$$

Verfahren zur Nullstellenberechnung:

- ▶ bestimme die Begleitmatrix
- ▶ bestimme die Eigenwerte der Begleitmatrix.

Hieraus ergibt sich eine **effiziente und stabile numerische Methode zur Berechnung der Nullstellen eines Polynoms.**

# Vektoriteration

Sei  $A$  diagonalisierbar, d.h., es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$ :

$$v^1, v^2, \dots, v^n \in \mathbb{C}^n.$$

Diese Vektoren  $v^i$  werden so skaliert, dass  $\|v^i\|_2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt.

# Vektoriteration

Sei  $A$  diagonalisierbar, d.h., es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$ :

$$v^1, v^2, \dots, v^n \in \mathbb{C}^n.$$

Diese Vektoren  $v^i$  werden so skaliert, dass  $\|v^i\|_2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt.

Außerdem nehmen wir an:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

# Vektoriteration

Sei  $A$  diagonalisierbar, d.h., es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$ :

$$v^1, v^2, \dots, v^n \in \mathbb{C}^n.$$

Diese Vektoren  $v^i$  werden so skaliert, dass  $\|v^i\|_2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt.

Außerdem nehmen wir an:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Ein beliebiger Startvektor  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  läßt sich darstellen als

$$x^0 = c_1 v^1 + c_2 v^2 + \dots + c_n v^n.$$

# Vektoriteration

Sei  $A$  diagonalisierbar, d.h., es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$ :

$$v^1, v^2, \dots, v^n \in \mathbb{C}^n.$$

Diese Vektoren  $v^i$  werden so skaliert, dass  $\|v^i\|_2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt.

Außerdem nehmen wir an:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Ein beliebiger Startvektor  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  läßt sich darstellen als

$$x^0 = c_1 v^1 + c_2 v^2 + \dots + c_n v^n.$$

Wir nehmen ferner an, dass  $x^0$  so gewählt ist, dass

$$c_1 \neq 0.$$



# Vektoriteration

Wendet man eine  $k$ -te Potenz von  $A$  auf  $x^0$  an, ergibt sich

$$x^k := A^k x^0 = c_1 \lambda_1^k v^1 + A^k r^0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Es gilt  $A^k r^0 \in \langle v^2, \dots, v^n \rangle$ .

# Vektoriteration

Wendet man eine  $k$ -te Potenz von  $A$  auf  $x^0$  an, ergibt sich

$$x^k := A^k x^0 = c_1 \lambda_1^k v^1 + A^k r^0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Es gilt  $A^k r^0 \in \langle v^2, \dots, v^n \rangle$ .

Wir untersuchen die Konvergenz von  $(x^k)_{k \geq 1}$ .

Abstandsbegriff:

$$d_V(w, \langle v \rangle) := \frac{\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|w - \alpha v\|_V}{\|w\|_V}, \quad v, w \in \mathbb{R}^n, \quad w \neq 0, \quad v \neq 0,$$

mit  $\|x\|_V := \|V^{-1}x\|_2$  und  $V := (v^1 \quad v^2 \quad \dots \quad v^n)$  Matrix der Eigenvektoren.

# Vektoriteration

Es gilt:

$$\frac{1}{\kappa_2(V)} d(w, \langle v \rangle) \leq d_V(w, \langle v \rangle) \leq \kappa_2(V) d(w, \langle v \rangle)$$

und

$$\|A^k r^0\|_V = \|V^{-1} A^k r^0\| = \|\Lambda^k V^{-1} r^0\|_2 \leq |\lambda_2|^k \|r^0\|_V$$
$$d_V(x^k, \langle v^1 \rangle) \leq \frac{\|r^0\|_V}{|c_1|} \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k$$

# Vektoriteration

Es gilt:

$$\frac{1}{\kappa_2(V)} d(w, \langle v \rangle) \leq d_V(w, \langle v \rangle) \leq \kappa_2(V) d(w, \langle v \rangle)$$

und

$$\begin{aligned} \|A^k r^0\|_V &= \|V^{-1} A^k r^0\| = \|\Lambda^k V^{-1} r^0\|_2 \leq |\lambda_2|^k \|r^0\|_V \\ d_V(x^k, \langle v^1 \rangle) &\leq \frac{\|r^0\|_V}{|c_1|} \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \end{aligned}$$

Abstand zwischen  $x^k$  und  $\langle v^1 \rangle$  strebt gegen Null

$$d(x^k, \langle v^1 \rangle) \leq \hat{c} \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{mit } \hat{c} := \kappa_2(V) \frac{\|r^0\|_V}{|c_1|}$$

# Vektoriteration

Rayleigh-Quotient als Approximation des betragsmäßig größten Eigenwertes  $\lambda_1$ :

$$\lambda^{(k)} := r(x^k) = \frac{(x^k)^T A x^k}{\|x^k\|^2} = \frac{(x^k)^T x^{k+1}}{\|x^k\|^2}$$

# Vektoriteration

**Rayleigh-Quotient** als Approximation des betragsmäßig größten Eigenwertes  $\lambda_1$ :

$$\lambda^{(k)} := r(x^k) = \frac{(x^k)^T A x^k}{\|x^k\|^2} = \frac{(x^k)^T x^{k+1}}{\|x^k\|^2}$$

## Fehlerschranken für Eigenwertapproximation

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \leq c_1 \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad c_1 := 3\hat{c}\|A\|_2,$$

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \leq c_2 \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2k}, \quad c_2 := 2\hat{c}^2\|A\|_2, \quad \text{wenn } A = A^T$$

# Vektoriteration

**Rayleigh-Quotient** als Approximation des betragsmäßig größten Eigenwertes  $\lambda_1$ :

$$\lambda^{(k)} := r(x^k) = \frac{(x^k)^T A x^k}{\|x^k\|^2} = \frac{(x^k)^T x^{k+1}}{\|x^k\|^2}$$

## Fehlerschranken für Eigenwertapproximation

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \leq c_1 \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad c_1 := 3\hat{c}\|A\|_2,$$

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \leq c_2 \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2k}, \quad c_2 := 2\hat{c}^2\|A\|_2, \quad \text{wenn } A = A^T$$

Da  $\|x^k\|_2 \rightarrow \infty$ , falls  $|\lambda_1| > 1$ , und  $\|x^k\|_2 \rightarrow 0$  falls  $|\lambda_1| < 1$ , ist es zweckmäßig, die Iterierten  $x^k$  zu skalieren.

# Vektoriteration

Insgesamt ergibt sich

## Algorithmus 7.26 (Vektoriteration/Potenzmethode)

Wähle Startvektor  $\mathbf{y}^0$  mit  $\|\mathbf{y}^0\|_2 = 1$ .

Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  berechne

$$\tilde{\mathbf{y}}^{k+1} = A\mathbf{y}^k$$

$$\lambda^{(k)} = (\mathbf{y}^k)^T \tilde{\mathbf{y}}^{k+1}$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = \tilde{\mathbf{y}}^{k+1} / \|\tilde{\mathbf{y}}^{k+1}\|_2.$$



# Vektoriteration

Insgesamt ergibt sich

## Algorithmus 7.26 (Vektoriteration/Potenzmethode)

Wähle Startvektor  $\mathbf{y}^0$  mit  $\|\mathbf{y}^0\|_2 = 1$ .

Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  berechne

$$\tilde{\mathbf{y}}^{k+1} = A\mathbf{y}^k$$

$$\lambda^{(k)} = (\mathbf{y}^k)^T \tilde{\mathbf{y}}^{k+1}$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = \tilde{\mathbf{y}}^{k+1} / \|\tilde{\mathbf{y}}^{k+1}\|_2.$$

Mit  $\mathbf{x}^0 := \mathbf{y}^0$  kann man über Induktion einfach zeigen, dass gilt

$$\mathbf{y}^k = \frac{\mathbf{x}^k}{\|\mathbf{x}^k\|_2} = \frac{A^k \mathbf{x}^0}{\|A^k \mathbf{x}^0\|_2}.$$

## Beispiel 7.27

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mit Spektrum  $\sigma(A) = \{5, 8, 6, -4 - 2\}$ , also

$$\lambda_1 = 8, \quad \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = \frac{3}{4}$$

Der Eigenwert  $\lambda_1$  hat den zugehörigen Eigenvektor  $v^1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0\right)^T$ .

Einige Resultate der Vektoriteration mit Startvektor

$$y^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, 1, 1, 1)^T.$$

## Beispiel 7.27

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_1 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_1 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_1 }$
0	6.8000	-
1	3.0947	0.46
2	1.3864	0.44
3	1.5412	1.11
4	0.8622	0.56
5	0.7103	0.82
6	0.4758	0.67
7	0.3666	0.77
8	0.2629	0.72
9	0.1992	0.76
10	0.1468	0.74
11	0.1107	0.75

Annäherung des Eigenvektors  $v^1$  nach 12 Iterationen:

$$y^{12} = (0.7940, 0.6079, 0.0070, -0.0001, 0.0000)^T.$$

# Beispiel 7.29

Wir betrachten das Eigenwertproblem in Beispiel 7.1 mit  $R = I$ , also

$$Ax = \lambda x, \quad (A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \text{ wie in (7.4)}).$$

Für die Matrix  $A$  ist eine explizite [Formel für die Eigenwerte](#) bekannt:

$$\lambda_{n-k} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} k \pi h \right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad h := \frac{1}{n}.$$

## Beispiel 7.29

Wir betrachten das Eigenwertproblem in Beispiel 7.1 mit  $R = I$ , also

$$Ax = \lambda x, \quad (A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \text{ wie in (7.4)}).$$

Für die Matrix  $A$  ist eine explizite [Formel für die Eigenwerte](#) bekannt:

$$\lambda_{n-k} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} k \pi h \right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad h := \frac{1}{n}.$$

Man erwartet [langsame Konvergenz](#), wegen

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = 1 - \frac{3}{4} \pi^2 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

## Beispiel 7.29

Langsame Konvergenz  $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda_1$  für  $h \ll 1$ .

Ergebnisse für  $h = \frac{1}{30}$ :

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_1 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_1 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_1 }$
1	1.79e+3	0.51
5	4.81e+2	0.82
15	1.64e+2	0.93
50	4.36e+1	0.98
100	1.70e+1	0.98
150	8.16	0.99

# Inverse Vektoriteration

Angenommen, wir hätten eine Annäherung

$$\mu \approx \lambda_i$$

eines beliebigen Eigenwertes  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  zur Verfügung, so dass

$$0 < |\mu - \lambda_i| < |\mu - \lambda_j| \quad \text{für alle } j \neq i.$$

Dann ist  $(\lambda_i - \mu)^{-1}$  der **betragsgrößte** Eigenwert der Matrix  $(A - \mu I)^{-1}$ .

# Inverse Vektoriteration

Angenommen, wir hätten eine Annäherung

$$\mu \approx \lambda_i$$

eines beliebigen Eigenwertes  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  zur Verfügung, so dass

$$0 < |\mu - \lambda_i| < |\mu - \lambda_j| \quad \text{für alle } j \neq i.$$

Dann ist  $(\lambda_i - \mu)^{-1}$  der **betragsgrößte** Eigenwert der Matrix  $(A - \mu I)^{-1}$ . Zur Berechnung von

$$(\lambda_i - \mu)^{-1},$$

und damit von  $\lambda_i$ ,

kann man die **Vektoriteration** auf  $(A - \mu I)^{-1}$  anwenden.



# Inverse Vektoriteration

## Algorithmus 7.30 (Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung)

Wähle Startvektor  $\mathbf{y}^0$  mit  $\|\mathbf{y}^0\|_2 = 1$ .

Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  :

$$\text{Löse } (A - \mu I)\tilde{\mathbf{y}}^{k+1} = \mathbf{y}^k$$

$$\lambda^{(k)} := \frac{1}{(\mathbf{y}^k)^T \tilde{\mathbf{y}}^{k+1}} + \mu$$

$$\mathbf{y}^{k+1} := \frac{\tilde{\mathbf{y}}^{k+1}}{\|\tilde{\mathbf{y}}^{k+1}\|_2}.$$

# Inverse Vektoriteration

## Algorithmus 7.30 (Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung)

Wähle Startvektor  $\mathbf{y}^0$  mit  $\|\mathbf{y}^0\|_2 = 1$ .

Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  :

$$\text{Löse } (A - \mu I)\tilde{\mathbf{y}}^{k+1} = \mathbf{y}^k$$

$$\lambda^{(k)} := \frac{1}{(\mathbf{y}^k)^T \tilde{\mathbf{y}}^{k+1}} + \mu$$

$$\mathbf{y}^{k+1} := \frac{\tilde{\mathbf{y}}^{k+1}}{\|\tilde{\mathbf{y}}^{k+1}\|_2}.$$

Es gilt:

$$\lambda^{(k)} := \frac{1}{(\mathbf{y}^k)^T \tilde{\mathbf{y}}^{k+1}} + \mu \rightarrow \lambda_i \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

# Inverse Vektoriteration

Die **Konvergenzgeschwindigkeit** wird durch das Verhältnis zwischen  $1/|\lambda_i - \mu|$  und dem betragsmäßig zweitgrößten Eigenwert von  $(A - \mu I)^{-1}$ , also durch den **Faktor**

$$\frac{\max_{j \neq i} \frac{1}{|\lambda_j - \mu|}}{\frac{1}{|\lambda_i - \mu|}} = \frac{\frac{1}{\min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu|}}{\frac{1}{|\lambda_i - \mu|}} = \frac{|\lambda_i - \mu|}{\min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu|}$$

bestimmt.

# Inverse Vektoriteration

Die **Konvergenzgeschwindigkeit** wird durch das Verhältnis zwischen  $1/|\lambda_i - \mu|$  und dem betragsmäßig zweitgrößten Eigenwert von  $(A - \mu I)^{-1}$ , also durch den **Faktor**

$$\frac{\max_{j \neq i} \frac{1}{|\lambda_j - \mu|}}{\frac{1}{|\lambda_i - \mu|}} = \frac{\frac{1}{\min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu|}}{\frac{1}{|\lambda_i - \mu|}} = \frac{|\lambda_i - \mu|}{\min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu|}$$

bestimmt.

Ist  $\mu$  eine besonders gute Schätzung von  $\lambda_i$ , so gilt

$$\frac{|\lambda_i - \mu|}{\min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu|} \ll 1,$$

das Verfahren **konvergiert in diesem Fall sehr rasch**.

## Beispiel 7.32

Wir betrachten die Matrix aus Beispiel 7.27 und wenden zur Berechnung des Eigenwerts  $\lambda_4 = -4$  inverse Vektoriteration mit  $\mu = -3.5$  und  $\mathbf{y}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, 1, 1, 1)^T$  an.

Resultate:

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_4 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_4 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_4 }$
0	5.45	-
1	3.99e-1	0.073
2	1.04e-1	0.26
3	3.83e-2	0.37
4	1.24e-2	0.32
5	4.17e-3	0.34
6	1.39e-3	0.33

## Beispiel 7.32

Für den theoretischen **Konvergenzfaktor** ergibt sich

$$\frac{|\lambda_4 - \mu|}{\min_{j \neq 4} |\lambda_j - \mu|} = \frac{|\lambda_4 + 3.5|}{\min_{j \neq 4} |\lambda_j + 3.5|} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}.$$

## Beispiel 7.32

Für den theoretischen **Konvergenzfaktor** ergibt sich

$$\frac{|\lambda_4 - \mu|}{\min_{j \neq 4} |\lambda_j - \mu|} = \frac{|\lambda_4 + 3.5|}{\min_{j \neq 4} |\lambda_j + 3.5|} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}.$$

Für die inverse Vektoriteration, wobei man den Parameter  $\mu$  nach jedem Schritt auf die jeweils aktuellste Annäherung  $\lambda^{(k)}$  von  $\lambda_4 = -4$  setzt,

$$\mu_0 := -3.5, \quad \mu_k = \lambda^{(k-1)} \quad \text{für } k \geq 1,$$

ist die **Konvergenz viel schneller**.

## Beispiel 7.32

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_4 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_4 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_4 ^2}$	$ \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} $
0	5.45	-	5.93
1	4.84e-1	0.016	7.53e-1
2	2.67e-1	1.15	2.41e-1
3	2.80e-2	0.39	2.76e-2
4	3.86e-4	0.49	2.86e-4
5	7.44e-8	0.50	7.44e-8
6	2.66e-15	0.48	-



## Beispiel 7.32

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_4 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_4 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_4 ^2}$	$ \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} $
0	5.45	-	5.93
1	4.84e-1	0.016	7.53e-1
2	2.67e-1	1.15	2.41e-1
3	2.80e-2	0.39	2.76e-2
4	3.86e-4	0.49	2.86e-4
5	7.44e-8	0.50	7.44e-8
6	2.66e-15	0.48	-

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist nun **quadratisch** statt linear.

**Fehlerschätzung:**

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_4| \approx |\lambda^{(k)} - \lambda^{(k+1)}|$$

# Unterraumiteration

Der  $QR$ -Algorithmus ist eng mit der sogenannten **Unterraum**iteration verwandt. Letztere Methode, die sich als Verallgemeinerung der **Vektor**iteration interpretieren läßt, wird zunächst behandelt.

# Unterraumiteration

Der  $QR$ -Algorithmus ist eng mit der sogenannten **Unterraum**iteration verwandt. Letztere Methode, die sich als Verallgemeinerung der **Vektor**iteration interpretieren läßt, wird zunächst behandelt.

## Algorithmus 7.35 Stabile Unterraumiteration

Wähle eine orthogonale Startmatrix  $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  berechne

$$B = AQ_k,$$

eine  $QR$ -Zerlegung von  $B$ :

$$B = Q_{k+1}R_{k+1},$$

mit  $Q_{k+1}$  orthogonal

und  $R_{k+1}$  eine obere Dreiecksmatrix.

# Unterraumiteration

**Notation:**  $Q_k = (q_k^1 \ q_k^2 \ \dots \ q_k^n)$  und

$$V_j = \langle v^1, \dots, v^j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n,$$

der von den Eigenvektoren  $v^1, \dots, v^j$  aufgespannte Unterraum.

# Unterraumiteration

**Notation:**  $Q_k = (q_k^1 \ q_k^2 \ \dots \ q_k^n)$  und

$$V_j = \langle v^1, \dots, v^j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n,$$

der von den Eigenvektoren  $v^1, \dots, v^j$  aufgespannte Unterraum.

Sei

$$S_k^j := \langle A^k q_0^1, A^k q_0^2, \dots, A^k q_0^j \rangle = \text{Bild } A^k(q_0^1 \ q_0^2 \ \dots \ q_0^j).$$

# Unterraumiteration

**Notation:**  $Q_k = (q_k^1 \ q_k^2 \ \dots \ q_k^n)$  und

$$V_j = \langle v^1, \dots, v^j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n,$$

der von den Eigenvektoren  $v^1, \dots, v^j$  aufgespannte Unterraum.

Sei

$$S_k^j := \langle A^k q_0^1, A^k q_0^2, \dots, A^k q_0^j \rangle = \text{Bild } A^k(q_0^1 \ q_0^2 \ \dots \ q_0^j).$$

Zusammenhang zwischen  $S_k^j$  und  $Q_k$ :

$$S_k^j = \langle q_k^1, q_k^2, \dots, q_k^j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n,$$

d.h., die Spalten von  $Q_k$  bilden eine **orthogonale Basis** des Raumes  $S_k^j$ .

# Unterraumiteration

Abstands begriff:

$$d(w, V_j) := \frac{\min_{v \in V_j} \|w - v\|_2}{\|w\|_2} = \frac{\|w - P_{V_j} w\|_2}{\|w\|_2}$$
$$d(S_k^j, V_j) := \max_{w \in S_k^j} d(w, V_j) = \max_{w \in S_k^j} \frac{\|w - P_{V_j} w\|_2}{\|w\|_2}$$

# Unterraumiteration

Abstands begriff:

$$d(w, V_j) := \frac{\min_{v \in V_j} \|w - v\|_2}{\|w\|_2} = \frac{\|w - P_{V_j} w\|_2}{\|w\|_2}$$

$$d(S_k^j, V_j) := \max_{w \in S_k^j} d(w, V_j) = \max_{w \in S_k^j} \frac{\|w - P_{V_j} w\|_2}{\|w\|_2}$$

Bereits gezeigt:  $d(S_k^1, V_1) \leq \hat{c} \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k$ .

Annahme:  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$ .

Grundlegende Eigenschaft der Unterraumiteration:

$$d(S_k^j, V_j) \leq c_j \left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right|^k, \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots$$



## Beispiel 7.36

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$ . Für die Räume

$$\begin{aligned} S_k^1 &= \langle q_k^1 \rangle, \\ S_k^2 &= \langle q_k^1, q_k^2 \rangle, \\ S_k^3 &= \langle q_k^1, q_k^2, q_k^3 \rangle = \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

gilt, mit  $(q_k^1)_j$  die  $j$ -te Komponente von  $q_k^1$ :

$$\begin{aligned} d(S_k^1, V_1) &= \sqrt{(q_k^1)_1^2 + (q_k^1)_2^2} \\ d(S_k^2, V_2) &\approx \tilde{d}(S_k^2, V_2) := \max\{|(q_k^1)_1|, |(q_k^2)_1|\} \end{aligned}$$

## Beispiel 7.36

Ergebnisse der Unterraumiteration:

$k$	$d_k^1 := d(S_k^1, V_1)$	$d_k^2 := \tilde{d}(S_k^2, V_2)$	$d_k^1/d_{k-1}^1$	$d_k^2/d_{k-1}^2$
0	0.7454	0.6667	-	-
1	0.5547	0.7907	0.74	1.19
2	0.2490	0.8819	0.45	1.12
3	0.1392	0.4859	0.56	0.55
4	0.0844	0.2285	0.61	0.47
5	0.0524	0.1098	0.62	0.48
6	0.0331	0.0540	0.63	0.49
7	0.0213	0.0269	0.64	0.50
8	0.0138	0.0135	0.65	0.50
9	0.0090	0.0068	0.65	0.50
10	0.0059	0.0034	0.66	0.50
11	0.0039	0.0017	0.66	0.50

## Beispiel 7.36

Ergebnisse der Unterraumiteration:

$k$	$d_k^1 := d(S_k^1, V_1)$	$d_k^2 := \tilde{d}(S_k^2, V_2)$	$d_k^1/d_{k-1}^1$	$d_k^2/d_{k-1}^2$
0	0.7454	0.6667	-	-
1	0.5547	0.7907	0.74	1.19
2	0.2490	0.8819	0.45	1.12
3	0.1392	0.4859	0.56	0.55
4	0.0844	0.2285	0.61	0.47
5	0.0524	0.1098	0.62	0.48
6	0.0331	0.0540	0.63	0.49
7	0.0213	0.0269	0.64	0.50
8	0.0138	0.0135	0.65	0.50
9	0.0090	0.0068	0.65	0.50
10	0.0059	0.0034	0.66	0.50
11	0.0039	0.0017	0.66	0.50

Beobachtungen:

- \*  $S_k^1 \rightarrow V_1$  mit Konvergenzgeschwindigkeit proportional zu  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k = \left( \frac{2}{3} \right)^k$
- \*  $S_k^2 \rightarrow V_2$  mit Konvergenzgeschwindigkeit proportional zu  $\left| \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right|^k = \left( \frac{1}{2} \right)^k$

# Unterraumiteration

Aus

$$d(S_k^j, V_j) \leq c_j \left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right|^k, \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots$$

folgt:  $q_k^j = \sum_{\ell=1}^j \alpha_{\ell,k} v^\ell + r_k$ , mit  $r_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ),  
und somit

$$\begin{aligned} Aq_k^j &= \sum_{\ell=1}^j \alpha_{\ell,k} A v^\ell + \tilde{r}_k \quad (\tilde{r}_k := A r_k) \\ &= \sum_{\ell=1}^j \alpha_{\ell,k} \lambda_\ell v^\ell + \tilde{r}_k \quad \text{mit } \tilde{r}_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \\ &= \sum_{\ell=1}^j \beta_{\ell,k} q_k^\ell + \hat{r}_k, \quad \text{mit } \hat{r}_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

# Unterraumiteration

Wegen der Orthogonalität

$$(q_k^i)^T q_k^\ell = 0, \quad i \neq \ell$$

erhält man für  $i > j$  :

$$(q_k^i)^T A q_k^j = (q_k^i)^T \hat{r}_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

# Unterraumiteration

Wegen der Orthogonalität

$$(q_k^i)^T q_k^\ell = 0, \quad i \neq \ell$$

erhält man für  $i > j$  :

$$(q_k^i)^T A q_k^j = (q_k^i)^T \hat{r}_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Hieraus folgt:

## Zusammenhang Unterraumiteration–Schur-Faktorisierung

Die Folge

$$\{Q_k^T A Q_k\}_{k=1,2,\dots}$$

konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen eine obere Dreiecksmatrix.

## Beispiel 7.39

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$  von  $A$  und  $Q_0$  die Startmatrix.

## Beispiel 7.39

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$  von  $A$  und  $Q_0$  die Startmatrix.

Ergebnisse der Unterraumiteration:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2.8462 & 1.5151 & 3.8814 \\ 1.3423 & 1.8106 & 2.8356 \\ 0.1438 & -0.7700 & 1.3433 \end{pmatrix}$$



## Beispiel 7.39

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$  von  $A$  und  $Q_0$  die Startmatrix.

Ergebnisse der Unterraumiteration:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3.2620 & 5.0188 & 0.4950 \\ -0.0631 & 1.8341 & 0.8540 \\ -0.0010 & -0.1097 & 0.9039 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 7.39

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$  von  $A$  und  $Q_0$  die Startmatrix.

Ergebnisse der Unterraumiteration:

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 3.0038 & 4.9993 & 1.0002 \\ -0.0008 & 1.9963 & 0.9991 \\ -0.0000 & -0.0001 & 0.9999 \end{pmatrix}$$

Es gilt  $\sigma(A) = \sigma(A_1) = \dots = \sigma(A_{15}) \approx \sigma(\text{diag}(A_{15}))$ , und

$$\sigma(\text{diag}(A_{15})) \approx \{3.00, 2.00, 1.00\}$$

## Fazit der Unterraumiteration

Da wir angenommen haben, dass die Matrix  $A$  nur **einfache** Eigenwerte besitzt, hat die reelle Schur-Faktorisierung von  $A$  die Form

$$Q^T A Q = R,$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix  $R$ .

## Fazit der Unterraumiteration

Da wir angenommen haben, dass die Matrix  $A$  nur **einfache** Eigenwerte besitzt, hat die reelle Schur-Faktorisierung von  $A$  die Form

$$Q^T A Q = R,$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix  $R$ .

Aus der Analyse der Unterraumiteration folgt, dass diese Methode eine Folge  $Q_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , von **orthogonalen Matrizen** mit der Eigenschaft

$$Q_k^T A Q_k = A_k \rightarrow R$$

liefert.

## Fazit der Unterraumiteration

Da wir angenommen haben, dass die Matrix  $A$  nur **einfache** Eigenwerte besitzt, hat die reelle Schur-Faktorisierung von  $A$  die Form

$$Q^T A Q = R,$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix  $R$ .

Aus der Analyse der Unterraumiteration folgt, dass diese Methode eine Folge  $Q_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , von **orthogonalen Matrizen** mit der Eigenschaft

$$Q_k^T A Q_k = A_k \rightarrow R$$

liefert.

Fazit :

Die Unterraumiteration ergibt eine näherungsweise Konstruktion der reellen Schur-Faktorisierung.

# QR-Algorithmus

Die über die Unterraumiteration definierten Matrizen  $A_k$  können einfach **rekursiv** berechnet werden.

## Lemma 7.42

Sei  $\tilde{A}_0 := Q_0^T A Q_0$ , wobei  $Q_0$  die in Algorithmus 7.35 gewählte orthogonale Startmatrix ist, und sei  $\tilde{A}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , definiert durch

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{k-1} &= \tilde{Q}_{k-1} \tilde{R}_{k-1} \quad (QR\text{-Zerlegung von } \tilde{A}_{k-1}, \text{ mit } r_{i,i} \geq 0) \\ \tilde{A}_k &:= \tilde{R}_{k-1} \tilde{Q}_{k-1}.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{A}_k = A_k = Q_k^T A Q_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei  $\{Q_k\}$  die im Algorithmus 7.35 definierte Folge ist.

# QR-Algorithmus

Aufgrund von Lemma 7.42 läßt sich folgende einfache Methode zur Berechnung der Matrizen  $A_k = Q_k^T A Q_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , formulieren:

## Algorithmus 7.43 (QR-Algorithmus)

Gegeben:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und eine orthogonale Matrix  $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (z.B.  $Q_0 = I$ ).

Berechne  $A_0 = Q_0^T A Q_0$ .

Für  $k = 1, 2, \dots$  berechne

$$A_{k-1} = QR \quad (QR\text{-Zerlegung von } A_{k-1})$$

$$A_k := RQ.$$

## Beispiel 7.44

Für die symmetrische Matrix  $A$  aus Beispiel 7.28 mit

$$\sigma(A) = \{3, 9, -36\}$$

liefert der  $QR$ -Algorithmus mit  $Q_0 = I$  folgende Resultate:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -35.984 & -0.8601 & -0.0392 \\ -0.8601 & 8.9590 & 0.3826 \\ -0.0392 & 0.3826 & 3.0246 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -36.000 & 0.0135 & -0.0000 \\ 0.0135 & 9.0000 & -0.0143 \\ -0.0000 & -0.0143 & 3.0000 \end{pmatrix}.$$



## Beispiel 7.44

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -18 & 5 \\ 15 & 9 & -5 \\ 9 & -27 & 24 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma(A) = \{9, 27 + 9i, 27 - 9i\}$$

ergeben sich mit  $Q_0 = I$  folgende Resultate:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 21.620 & -5.8252 & 15.748 \\ 19.195 & 32.873 & -26.365 \\ -0.2210 & 0.2433 & 8.5070 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 7.44

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -18 & 5 \\ 15 & 9 & -5 \\ 9 & -27 & 24 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma(A) = \{9, 27 + 9i, 27 - 9i\}$$

ergeben sich mit  $Q_0 = I$  folgende Resultate:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 33.228 & -19.377 & 25.450 \\ 6.1735 & 20.779 & 16.971 \\ 0.0038 & -0.0205 & 8.9930 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 7.44

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -18 & 5 \\ 15 & 9 & -5 \\ 9 & -27 & 24 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma(A) = \{9, 27 + 9i, 27 - 9i\}$$

ergeben sich mit  $Q_0 = I$  folgende Resultate:

$$A_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{33.228} & \mathbf{-19.377} & 25.450 \\ \mathbf{6.1735} & \mathbf{20.779} & 16.971 \\ 0.0038 & -0.0205 & 8.9930 \end{pmatrix}$$

Der farbige  $2 \times 2$ -Diagonalblock in der oberen linken Ecke der Matrix  $A_6$  hat Eigenwerte  $27.004 \pm 8.993i$ .

# Bemerkungen

- ▶ Die **Konvergenz** des **QR**-Verfahrens wird sehr langsam sein, falls es ein  $j$  gibt, für das  $\left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right| \approx 1$  gilt.

# Bemerkungen

- ▶ Die **Konvergenz** des **QR**-Verfahrens wird sehr langsam sein, falls es ein  $j$  gibt, für das  $\left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right| \approx 1$  gilt.
- ▶ Der **Aufwand pro Schritt** beim **QR**-Verfahren ist erheblich, da man jedes mal die **QR**-Zerlegung einer  $n \times n$ -Matrix (z.B. mit Householder-Spiegelungen) und das Produkt **RQ** berechnen muß.

# Bemerkungen

- ▶ Die **Konvergenz** des **QR**-Verfahrens wird sehr langsam sein, falls es ein  $j$  gibt, für das  $\left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right| \approx 1$  gilt.
- ▶ Der **Aufwand pro Schritt** beim **QR**-Verfahren ist erheblich, da man jedes mal die **QR**-Zerlegung einer  $n \times n$ -Matrix (z.B. mit Householder-Spiegelungen) und das Produkt **RQ** berechnen muß.
- ▶ Der **Aufwand pro Iteration** ist i.a.  $\mathcal{O}(n^3)$  Flop. Der **QR**-Algorithmus 7.43 ist daher im allgemeinen **kein effizientes Verfahren!**

# Hessenberg-Form

Eine Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **obere Hessenberg-Matrix**, falls  $B$  die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} * & \dots & \dots & \dots & * \\ * & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

hat.

# Hessenberg-Form

Eine Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **obere Hessenberg-Matrix**, falls  $B$  die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

hat.

In Beispiel 7.46 wird gezeigt, wie man eine Matrix  $A$  über eine **orthogonale Ähnlichkeitstransformation**, d.h.

$$Q^T A Q, \quad \text{mit } Q \text{ orthogonal}$$

auf obere Hessenberg-Form bringen kann.



## Beispiel 7.46

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 12 \\ 2 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & -28 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

## Beispiel 7.46

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 12 \\ 2 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & -28 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man setze

$$v^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_{v^1} := I - 2 \frac{v^1 (v^1)^T}{(v^1)^T v^1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

und

$$Q_1 := \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q_{v^1} & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

## Beispiel 7.46

Dann ergibt sich

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -6 & 0 \\ -3 & 21 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & -21 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

## Beispiel 7.46

Dann ergibt sich

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -6 & 0 \\ -3 & 21 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & -21 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Bei der Multiplikation von  $Q_1 A$  mit  $Q_1$  bleiben die Null-Einträge in der ersten Spalte erhalten:

$$\tilde{A} := Q_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -14 & -8 \\ -3 & 3 & -18 & -15 \\ 0 & 12 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 22 & 7 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 7.46

Sei

$$v^2 := \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} + 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q_{v^2} := I - 2 \frac{v^2 (v^2)^T}{(v^2)^T v^2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

und

$$Q_2 := \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hline & & Q_{v^2} & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right).$$

## Beispiel 7.46

Sei

$$v^2 := \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} + 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q_{v^2} := I - 2 \frac{v^2 (v^2)^T}{(v^2)^T v^2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

und

$$Q_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left| \begin{array}{c} Q_{v^2} \end{array} \right. \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich

$$Q_2 \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -14 & -8 \\ -3 & 3 & -18 & -15 \\ 0 & -13 & -5.692 & 0.0769 \\ 0 & 0 & 21.462 & 7.615 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 7.46

Multipliziert man  $Q_2\tilde{A}$  mit  $Q_2$ , so ergibt sich

$$\hat{A} := Q_2\tilde{A}Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 & -2 \\ -3 & 3 & 22.385 & -6.923 \\ 0 & -13 & 5.225 & 2.260 \\ 0 & 0 & -22.740 & 1.225 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 7.46

Multipliziert man  $Q_2 \tilde{A}$  mit  $Q_2$ , so ergibt sich

$$\hat{A} := Q_2 \tilde{A} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 & -2 \\ -3 & 3 & 22.385 & -6.923 \\ 0 & -13 & 5.225 & 2.260 \\ 0 & 0 & -22.740 & 1.225 \end{pmatrix}$$

Sei

$$Q = Q_1 Q_2,$$

also

$$Q^T = Q_2^T Q_1^T = Q_2 Q_1,$$

dann gilt

$$Q^T A Q = Q_2 Q_1 A Q_1 Q_2 = \hat{A},$$

wobei  $\hat{A}$  eine obere Hessenberg-Matrix ist.



# Nicht-reduzierbare obere Hessenberg-Matrix

## Transformation auf Hessenbergform

Man kann eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  durch Householder-Transformationen auf eine zu  $\mathbf{A}$  ähnliche Matrix mit oberer Hessenberg-Gestalt bringen. Der Rechenaufwand ist etwa  $\frac{8}{3}n^3$  Flop.

# Nicht-reduzierbare obere Hessenberg-Matrix

## Transformation auf Hessenbergform

Man kann eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  durch Householder-Transformationen auf eine zu  $A$  ähnliche Matrix mit oberer Hessenberg-Gestalt bringen. Der Rechenaufwand ist etwa  $\frac{8}{3}n^3$  Flop.

Wir nehmen im weiteren an, dass  $A$  eine **nicht-reduzierbare** obere Hessenberg-Matrix ist.

Also hat  $A$  eine obere Hessenberg-Form mit  $a_{i+1,i} \neq 0$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

# Nicht-reduzierbare obere Hessenberg-Matrix

Die Hessenberg-Gestalt der Matrix bringt mehrere große Vorteile.

Der erste Vorteil ist folgender:

Wenn  $A$  eine nicht-reduzierbare obere Hessenberg-Matrix ist, kann man die Identität als Anfangsmatrix bei der Unterraumiteration (also auch beim  $QR$ -Algorithmus) verwenden.

## Lemma 7.48

Das folgende Resultat zeigt, dass im  $QR$ -Algorithmus die obere Hessenberg-Gestalt erhalten bleibt.

### Lemma 7.37.

Sei  $A_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine obere Hessenberg-Matrix und

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= QR \quad (QR\text{-Zerlegung von } A_{k-1}) \\ A_k &:= RQ \end{aligned}$$

der Iterationsschritt im  $QR$ -Algorithmus 7.43, dann ist auch  $A_k$  eine obere Hessenberg-Matrix.

## Bemerkung 7.49

Aufgrund dieses Ergebnisses ergibt sich als zweiter Vorteil der Transformation auf Hessenberg-Gestalt eine **starke Reduktion des Rechenaufwandes**:

### Bemerkung 7.49

Dadurch, dass man die Matrix  $A$  beim  $QR$ -Algorithmus in einer Vorbereitungsphase auf obere Hessenberg-Form bringt, braucht man nur die  $QR$ -Zerlegung einer **Hessenberg-Matrix**  $A_{k-1}$  zu berechnen.

## Bemerkung 7.49

Aufgrund dieses Ergebnisses ergibt sich als zweiter Vorteil der Transformation auf Hessenberg-Gestalt eine **starke Reduktion des Rechenaufwandes**:

### Bemerkung 7.49

Dadurch, dass man die Matrix  $A$  beim  $QR$ -Algorithmus in einer Vorbereitungsphase auf obere Hessenberg-Form bringt, braucht man nur die  $QR$ -Zerlegung einer **Hessenberg-Matrix**  $A_{k-1}$  zu berechnen.

Falls man dazu Givens-Rotationen verwendet, ist der Aufwand für die Berechnung  $A_{k-1} = QR$ ,  $A_k := RQ$  nur  $\mathcal{O}(n^2)$  Flop.

## Bemerkung 7.49

Aufgrund dieses Ergebnisses ergibt sich als zweiter Vorteil der Transformation auf Hessenberg-Gestalt eine **starke Reduktion des Rechenaufwandes**:

### Bemerkung 7.49

Dadurch, dass man die Matrix  $A$  beim  $QR$ -Algorithmus in einer Vorbereitungsphase auf obere Hessenberg-Form bringt, braucht man nur die  $QR$ -Zerlegung einer **Hessenberg-Matrix**  $A_{k-1}$  zu berechnen.

Falls man dazu Givens-Rotationen verwendet, ist der Aufwand für die Berechnung  $A_{k-1} = QR$ ,  $A_k := RQ$  nur  $\mathcal{O}(n^2)$  Flop.

Falls  $A$  symmetrisch ist, ist dieser Aufwand nur  $\mathcal{O}(n)$  Flop.

# Konvergenzgeschwindigkeit

Wegen der oberen Hessenberggestalt der Matrizen  $A_k$  zeigt das Konvergenzverhalten der Subdiagonalelemente

$$a_{i+1,i}^{(k)} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

gerade die Konvergenzgeschwindigkeit.

Dies ist ein weiterer Vorteil der oberen Hessenberg-Gestalt.



# Beispiel 7.50

Wir betrachten die Matrix

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen  $A_k$ ,  $k \geq 1$ , haben dann alle eine obere Hessenberg-Gestalt.

## Beispiel 7.50

Wir betrachten die Matrix

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

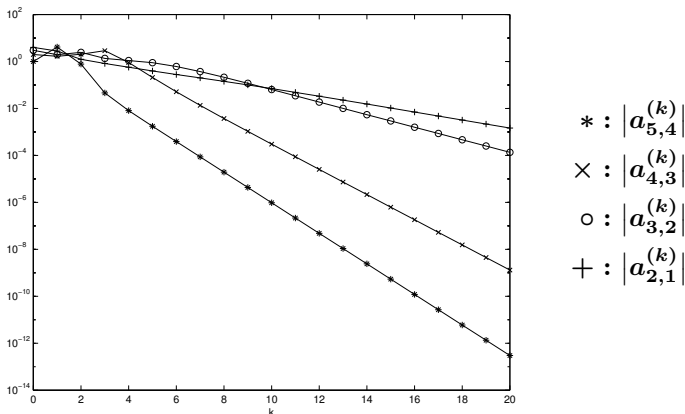
Die Matrizen  $A_k$ ,  $k \geq 1$ , haben dann alle eine obere Hessenberg-Gestalt.

Für  $k = 20$  ergibt sich als Resultat bzgl. der Eigenwerte:

$$\sigma(A) = \sigma(A_{20}) \approx \{14.15, 9.53, 5.16, 1.50, -0.34\}.$$

# Beispiel 7.50

In der Abbildung wird die Größe der Einträge  $a_{i+1,i}^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) für  $k = 0, 1, 2, \dots, 20$  dargestellt.



# Beispiel 7.50

Konvergenzverhalten

$$|a_{2,1}^{(k)}| \approx c_1 (0.67)^k \approx c_1 \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k$$

$$|a_{4,3}^{(k)}| \approx c_3 (0.29)^k \approx c_3 \left| \frac{\lambda_4}{\lambda_3} \right|^k$$

$$|a_{3,2}^{(k)}| \approx c_2 (0.54)^k \approx c_2 \left| \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right|^k$$

$$|a_{5,4}^{(k)}| \approx c_4 (0.22)^k \approx c_5 \left| \frac{\lambda_5}{\lambda_4} \right|^k$$

# QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

Angenommen, wir hätten eine Annäherung  $\mu \approx \lambda_i$  eines Eigenwertes  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  zur Verfügung, so daß

$$|\mu - \lambda_i| \ll |\mu - \lambda_j| \quad \text{für alle } j \neq i$$

# QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

Angenommen, wir hätten eine Annäherung  $\mu \approx \lambda_i$  eines Eigenwertes  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  zur Verfügung, so daß

$$|\mu - \lambda_i| \ll |\mu - \lambda_j| \quad \text{für alle } j \neq i$$

Seien

$$|\tau_1| > |\tau_2| > \dots > |\tau_n| > 0$$

die Eigenwerte der Matrix  $A - \mu I$ , dann ist  $\tau_n = \lambda_i - \mu$  und

$$\frac{|\tau_n|}{|\tau_{n-1}|} \ll 1.$$

# QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

Algorithmus 7.51 (QR-Algorithmus mit Spektralverschiebung).

Gegeben: eine nicht-reduzierbare Hessenberg-Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A_0 := A.$$

Für  $k = 1, 2, \dots$ :

Bestimme  $\mu_{k-1} \in \mathbb{R}$ .

$$A_{k-1} - \mu_{k-1}I =: QR \quad (QR\text{-Zerlegung von } A_{k-1} - \mu_{k-1}I)$$

$$A_k := RQ + \mu_{k-1}I$$

# QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

Eine mögliche Wahl für den Verschiebungsparameter ist

$$\mu_{k-1} = a_{n,n}^{(k-1)}$$



# QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

Eine mögliche Wahl für den Verschiebungsparameter ist

$$\mu_{k-1} = a_{n,n}^{(k-1)}$$

Eine im allgemeinen bessere Strategie (siehe Buch):

basiert auf den Eigenwerten der  $2 \times 2$ -Matrix  $(a_{i,j}^{(k-1)})_{n-1 \leq i,j \leq n}$ .

Wie bei der inversen Vektoriteration **beschleunigt die Spektralverschiebung die Konvergenz des Verfahrens.**

# QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

Eine mögliche Wahl für den Verschiebungsparameter ist

$$\mu_{k-1} = a_{n,n}^{(k-1)}$$

Eine im allgemeinen bessere Strategie (siehe Buch):

basiert auf den Eigenwerten der  $2 \times 2$ -Matrix  $(a_{i,j}^{(k-1)})_{n-1 \leq i,j \leq n}$ .

Wie bei der inversen Vektoriteration **beschleunigt die Spektralverschiebung die Konvergenz des Verfahrens.**

Im allgemeinen ist die Konvergenzgeschwindigkeit sogar **quadratisch.**

# QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

Nach einigen Iterationen hat  $A_k$  die Struktur

$$\left( \begin{array}{cccc|cc} * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ * & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \mathbf{0} & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & * & * \\ \hline \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \varepsilon & \tilde{\lambda}_i \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|c} & & & & * \\ & & & & \vdots \\ & & \hat{A} & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & * \\ \hline \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \varepsilon & \tilde{\lambda}_i \end{array} \right)$$

mit  $|\varepsilon|$  "sehr klein".

Der  $QR$ -Algorithmus wird dann mit der Matrix  $\hat{A}$  fortgesetzt.

## Beispiel 7.52

Wir betrachten die Matrix  $A$  aus Beispiel 7.50 und wenden den  $QR$ -Algorithmus 7.51 an, wobei  $\mu_{k-1} = a_{n,n}^{(k-1)}$  genommen wird.

Sobald das Subdiagonalelement  $a_{5,4}^{(k)}$  die Bedingung

$$|a_{5,4}^{(k)}| < 10^{-16}$$

erfüllt, wird nur noch die  $4 \times 4$  Matrix links oben weiter bearbeitet. usw.

## Beispiel 7.52

Wir betrachten die Matrix  $A$  aus Beispiel 7.50 und wenden den  $QR$ -Algorithmus 7.51 an, wobei  $\mu_{k-1} = a_{n,n}^{(k-1)}$  genommen wird.

Sobald das Subdiagonalelement  $a_{5,4}^{(k)}$  die Bedingung

$$|a_{5,4}^{(k)}| < 10^{-16}$$

erfüllt, wird nur noch die  $4 \times 4$  Matrix links oben weiter bearbeitet. usw.

Für  $k = 17$  ergibt sich

$$A_{17} = \begin{pmatrix} 14.150 & 1.2371 & 1.5503 & -0.6946 & -0.4395 \\ -1.9e-19 & -0.3354 & -2.0037 & -8.5433 & -1.9951 \\ 0 & 2.1e-20 & 1.5014 & -1.4294 & -14.8840 \\ 0 & 0 & 1.8e-20 & 5.1552 & 3.2907 \\ 0 & 0 & 0 & -4.7e-21 & 9.5248 \end{pmatrix}.$$

## Beispiel 7.52

In der Abbildung wird die Größe der Einträge  $a_{i+1,i}^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) für  $k = 0, 1, 2, \dots, 18$  dargestellt.

