Kapitel 8

Buch Dahmen-Reusken

RWTH Aachen University

2022

Allgemeine Interpolationsaufgaben

Interpolationsaufgabe

Gegeben seien Stützstellen

$$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, und Daten

$$f(x_0), \ldots, f(x_n) \in \mathbb{R}.$$

Es sei G_n ein endlich dimensionaler Raum stetiger Funktionen (dessen Dimension von n abhängt). Man bestimme diejenige Funktion $g_n \in G_n$, die

$$g_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

erfüllt.

Allgemeine Interpolationsaufgaben

Lagrange-Polynominterpolation:

$$G_n = \Pi_n = \{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

Allgemeine Interpolationsaufgaben

Lagrange-Polynominterpolation:

$$G_n = \Pi_n = \{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

Splineinterpolation $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$:

$$G_n := \left\{ g \in C^2([x_0, x_n]) \mid g_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, 0 \leq i \leq n-1 \right\},$$

Allgemeine Interpolationsaufgaben

Lagrange-Polynominterpolation:

$$G_n = \Pi_n = \{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

Splineinterpolation ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$):

$$G_n := \left\{ g \in C^2([x_0, x_n]) \mid g_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, 0 \le i \le n-1 \right\},$$

Trigonometrische Interpolation:

$$G_n = \{ \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx} \mid c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C} \},$$

wobei i die komplexe Einheit mit $i^2 = -1$ ist. Mit $z := e^{ix}$ nimmt jedes $g \in G_n$ die Form eines Polynomes $\sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j$ über $\mathbb{C}$ an.

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$) und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$) und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \,\middle|\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$) und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \,\middle|\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- "Lagrange": Interpolation der Funktionswerte.
- Weitere Möglichkeit:
  - Hermite-Interpolation: zusätzlich Interpolation der Ableitungen.

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?
- Wie können wir den Fehler reduzieren?

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?
- Wie können wir den Fehler reduzieren?

Wichtig für: numerische Differentiation, numerische Integration, Computergraphik und viele weitere Anwendungen...

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Lagrange-Fundamentalpolynome

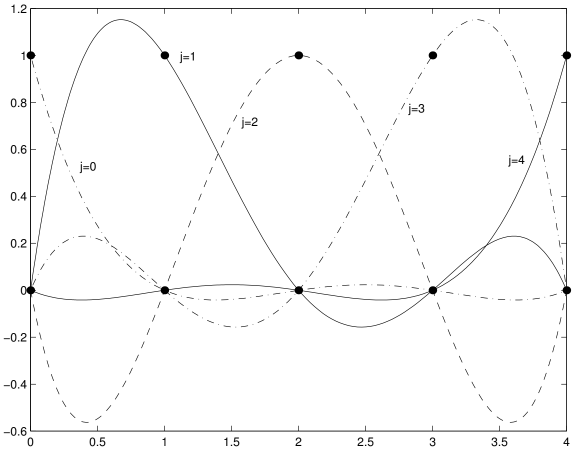
Für den Fall äquidistanter Stützstellen

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\ell}_{jn}(t) := \ell_{jn}(x_0 + th) &= \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x_0 + th - (x_0 + kh)}{x_0 + jh - (x_0 + kh)} \\
&= \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{(t-k)}{(j-k)} \\
&= \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} (t-k)
\end{aligned}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome



$n = 4$

$\hat{\ell}_{j4}(t)$

$t \in [0, 4]$

Das Lagrange-Interpolationspolynom

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \ldots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Das Lagrange-Interpolationspolynom

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \ldots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms ergibt sich:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen gilt

$$P(Q|x_0, \ldots, x_n) = Q.$$

Das Lagrange-Interpolationspolynom

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \ldots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms ergibt sich:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen gilt

$$P(Q|x_0, \ldots, x_n) = Q.$$

Begründung: Q interpoliert sich selbst und muss wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein.

Kondition

Frage: wie ist die Empfindlichkeit des Interpolationspolynoms $P(f|x_0,\dots,x_n)$ bezüglich Störungen in den Daten $f(x_j)$?

Absolute Kondition

$$\max_{x\in[a,b]}\left|P(f|x_0,\dots,x_n)(x)-P(\tilde f|x_0,\dots,x_n)(x)\right|$$

$$\leq \kappa_{\mathrm{Leb}} \max_{0\leq j\leq n}|f(x_j)-\tilde f(x_j)|, \quad \text{mit} \quad \kappa_{\mathrm{Leb}} := \max_{x\in[a,b]}\sum_{j=0}^{n}|\ell_{j,n}(x)|$$

Kondition

Frage: wie ist die Empfindlichkeit des Interpolationspolynoms $P(f|x_0,\dots,x_n)$ bezüglich Störungen in den Daten $f(x_j)$?

Absolute Kondition

$$\max_{x\in[a,b]} \left| P(f|x_0,\dots,x_n)(x) - P(\tilde{f}|x_0,\dots,x_n)(x) \right|$$

$$\leq \kappa_{\mathrm{Leb}} \max_{0\leq j\leq n} |f(x_j) - \tilde{f}(x_j)|, \quad \text{mit} \quad \kappa_{\mathrm{Leb}} := \max_{x\in[a,b]} \sum_{j=0}^{n} |\ell_{j,n}(x)|$$

κ_{Leb} ist die Lebesgue-Konstante:

- sie hängt nur von der Verteilung der Stützstellen in $[a,b]$ ab
- Translationsinvarianz: sie ändert sich nicht wenn die Stützstellen (mit zugehörigen Daten) um d verschoben werden

Lebesgue-Konstante

Eigenschaften:

- $$\kappa_{\text{Leb}} = \max_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{\ell}_{j,n}(t)\right|, \quad \hat{\ell}_{j,n} := \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{t-t_k}{t_j-t_k}.$$

Lebesgue-Konstante

Eigenschaften:

- $$\kappa_{\mathrm{Leb}} = \max_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{\ell}_{j,n}(t)\right|, \quad \hat{\ell}_{j,n} := \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{t-t_k}{t_j-t_k}.$$
- Bei einer äquidistanten Stützstellenverteilung:

$$\kappa_{\mathrm{Leb}} \sim \frac{2^{n+1}}{n\log n} \quad \text{für } n\to\infty.$$

Lebesgue-Konstante

Eigenschaften:

- $$\kappa_{\text{Leb}} = \max_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{\ell}_{j,n}(t)\right|, \quad \hat{\ell}_{j,n} := \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{t-t_k}{t_j-t_k}.$$
- Bei einer äquidistanten Stützstellenverteilung:
  $$\kappa_{\text{Leb}} \sim \frac{2^{n+1}}{n\log n} \quad \text{für } n\to\infty.$$
- Für die Tschebyscheff-Stützstellen
  $$t_j := \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{2j+1}{2n+2}\pi\right), \quad j = 0,\dots,n,$$
  gilt
  $$\kappa_{\text{Leb}} \sim \frac{2}{\pi}\log n \quad \text{für } n\to\infty.$$

Lebesgue-Konstante

n	äquidistant	Tschebyscheff
5	3.106	2.104
10	29.89	2.489
15	5.121e+2	2.728
20	1.099e+4	2.901

Fazit zur absoluten Kondition

Die Konditionszahl κ_{Leb} der Lagrange-Interpolationsaufgabe hängt nur von der Verteilung der Stützstellen ab. Bei einer äquidistanten Stützstellenverteilung ist für große n-Werte diese Konditionszahl sehr groß. Bei der Interpolation mit Tschebyscheff-Stützstellen ist, für große n-Werte, die Konditionszahl viel kleiner.

Lebesgue-Konstante

Weitere Bedeutung der Lebesgue-Konstante.

Sei f stetig auf $[a, b]$ und $\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Es gilt:

$$\|f - P(f|x_0, \ldots, x_n)\|_\infty \leq (1 + \kappa_{\mathrm{Leb}}) \inf_{P_n \in \Pi_n} \|f - P_n\|_\infty,$$

d.h., die Approximationsgüte der Interpolation ist bis auf einen durch die Lebesgue-Konstante gegebenen Proportionalitätsfaktor so gut wie die der **besten Approximation** von Π_n.

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?

   Auswertung ohne explizite Bestimmung des Polynoms:

   - Neville-Aitken-Verfahren

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?

   Auswertung ohne explizite Bestimmung des Polynoms:
   - Neville-Aitken-Verfahren

2. Darstellung in geschlossener Form.

   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\mathbf{\Pi}_n$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0) \end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als Konvexkombination der beiden interpolierende Geraden darstellbar,

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) \end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als Konvexkombination der beiden interpolierende Geraden darstellbar,

$$P(f|x_0,x_1,x_2)(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} P(f|x_1,x_2)(x) + \frac{x_2-x}{x_2-x_0} P(f|x_0,x_1)(x)$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.7 (Aitken)

$$
\begin{aligned}
P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = {} & \frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) \\
& + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x)
\end{aligned}
$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.7 (Aitken)

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x)$$

Die Interpolierende an den Stellen $\{x_0,\ldots,x_n\}$ ist eine Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades an den Stellen $\{x_1,\ldots,x_n\}$ und $\{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$, die jeweils Teilmengen der Gesamtstützstellenmenge sind.

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.7 (Aitken)

$$
\begin{aligned}
P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = {} & \frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) \\
& + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x)
\end{aligned}
$$

- Wir setzen für festes x

$$
P_{i,k} := P(f|x_{i-k},\ldots,x_i)(x), \quad 0 \le k \le i \le n,
$$

d.h. speziell

$$
\begin{aligned}
P_{n,n} &= P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) \\
P_{i,0} &= P(f|x_i)(x) = f(x_i)
\end{aligned}
$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.7 (Aitken)

$$\begin{aligned} P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = {} & \frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) \\ & + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x) \end{aligned}$$

Lemma 8.7 ergibt dann das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x-x_{i-k}}{x_i-x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-k}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Gegeben: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$

Gesucht: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \ldots & & \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
x_3 & f(x_3) & P_{3,1} & P_{3,2} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \ldots & \ldots & P_{n,n}
\end{array}
$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Gegeben: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$

Gesucht: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \ldots & & \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
x_3 & f(x_3) & P_{3,1} & P_{3,2} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \ldots & \ldots & P_{n,n}
\end{array}
$$

Beachte:

$P_{n,n}$ wird bestimmt

ohne explizite Darstellung von $P(f|x_0, \ldots, x_n)$.

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$			
$x_1 = 1$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$			
$x_1 = 1$			
$x_2 = 2$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$			
$x_2 = 2$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$		
$x_2 = 2$			

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$		
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$		

1. Einsetzen der gegebenen Werte

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$		
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$		

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$		

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Beispiel 8.8

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$\Longrightarrow P(f \mid 0, 1, 2)(0.5) = 3\tfrac{1}{8}$$

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen:
   - Neville-Aitken

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen:
   - Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form:
   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\mathbf{\Pi}_n$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen:
   - Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form:
   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\mathbf{\Pi}_n$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung:

Mit der monomialen Basis $1,\ x, \ldots,\ x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung:

Mit der monomialen Basis $1, x, \dots, x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Die Bedingungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Das Gleichungssystem

$$V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

muss also zur Bestimmung der Koeffizienten a_i gelöst werden.

Die Kondition des Problems

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \to V_n^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wird durch die Konditionszahl $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ beschrieben.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.

  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.

  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.

- Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines linearen Gleichungssystems der Größe $(n+1) \times (n+1)$.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.

  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.
- Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines linearen Gleichungssystems der Größe $(n+1) \times (n+1)$.

Beispiel 8.12: Konditionszahl $\kappa_2(V_n)$

Äquidistante bzw. Tschebyscheff Stützstellen im Intervall $[0, 1]$.

n	4	6	8	10
äquidistant	6.9e+2	3.6e+4	2.0e+6	1.2e+8
Tschebyscheff	6.3e+2	2.1e+4	6.9e+5	2.3e+7

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

- **Annahme:** Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt
- **Aufgabe:** Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

- **Annahme:** Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt
- **Aufgabe:** Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$ aus $P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) +$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

- **Annahme:** Interpolationspolynom $P(f|x_0,\dots,x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt
- **Aufgabe:** Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0,\dots,x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0,\dots,x_n)(x)$ aus $P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x) + \quad \underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

- **Annahme:** Interpolationspolynom $P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt
- **Aufgabe:** Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0,\ldots,x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0,\ldots,x_n)(x)$ aus $P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x) + \delta_n \cdot \underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

- **Annahme:** Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt
- **Aufgabe:** Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$ aus $P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n \cdot \underbrace{(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Beachte:

- δ_n ist ein skalarer (fester) Wert.
- δ_n ist der Koeffizient der höchsten Potenz x^n.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.14

Für die Lagrange-Interpolationspolynome

$$P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) \in \Pi_{n-1}$$

und

$$P_n(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) \in \Pi_n$$

gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.14

Für die Lagrange-Interpolationspolynome

$$P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) \in \Pi_{n-1}$$

und

$$P_n(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) \in \Pi_n$$

gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Da der Koeffizient δ_n von f und von den Stützstellen x_i abhängt, schreibt man auch

$$\delta_n =: [x_0, \ldots, x_n] f.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.15

$\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]f$ ist offensichtlich der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.15

$\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]f$ ist offensichtlich der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n.

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.15

$\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]f$ ist offensichtlich der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n.

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \; & [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) \\ & + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + [x_0, \ldots, x_n]f \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkungen:

- Die Knotenpolynome

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &:= 1 \\ \omega_1(x) &:= (x - x_0) \\ &\vdots \\ \omega_n(x) &:= (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

bilden die Newtonsche Basis von Π_n.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkungen:

- Die Knotenpolynome

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &:= 1 \\ \omega_1(x) &:= (x - x_0) \\ &\vdots \\ \omega_n(x) &:= (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

  bilden die Newtonsche Basis von Π_n.

- Für die Koeffizienten erhält man zum Beispiel

$$\delta_0 = [x_0]f = f(x_0)$$

$$\delta_1 = [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

  bzw. verallgemeinert dann ...

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.16.

Seien die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{[x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.16.

Seien die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{[x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

Da $[x_i]f = f(x_i)$ erhält man das rekursive Schema

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & [x_i]f & & [x_i, x_{i+1}]f & & [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f & & [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f \\
\hline
x_0 & [x_0]f & & & & & & \\
 & & > & [x_0, x_1]f & & & & \\
x_1 & [x_1]f & & & > & [x_0, x_1, x_2]f & & \\
 & & > & [x_1, x_2]f & & & > & [x_0, x_1, x_2, x_3]f \\
x_2 & [x_2]f & & & > & [x_1, x_2, x_3]f & & \vdots \\
 & & > & [x_2, x_3]f & & \vdots & & \\
x_3 & [x_3]f & & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	
$x_1 = 0.2$	

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	
$x_1 = 0.2$	
$x_2 = 0.4$	

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3.$

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3).$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	
$x_1 = 0.2$	
$x_2 = 0.4$	
$x_3 = 0.6$	

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	1.000
$x_1 = 0.2$	
$x_2 = 0.4$	
$x_3 = 0.6$	

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	1.000
$x_1 = 0.2$	0.9801
$x_2 = 0.4$	
$x_3 = 0.6$	

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	1.000
$x_1 = 0.2$	0.9801
$x_2 = 0.4$	0.9211
$x_3 = 0.6$	

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3.$

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3).$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	1.000
$x_1 = 0.2$	0.9801
$x_2 = 0.4$	0.9211
$x_3 = 0.6$	0.8253

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \dots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$	
$x_0 = 0$	1.000	
		>
$x_1 = 0.2$	0.9801	
		>
$x_2 = 0.4$	0.9211	
		>
$x_3 = 0.6$	0.8253	

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|lcl}
x_i & f(x_i) & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & \\
 & & > & -0.0995 \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & \\
 & & > & \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & \\
 & & > & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & &
\end{array}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$		
$x_0 = 0$	1.000		
		$>$	-0.0995
$x_1 = 0.2$	0.9801		
		$>$	-0.2950
$x_2 = 0.4$	0.9211		
		$>$	
$x_3 = 0.6$	0.8253		

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$		
$x_0 = 0$	1.000		
		$>$	-0.0995
$x_1 = 0.2$	0.9801		
		$>$	-0.2950
$x_2 = 0.4$	0.9211		
		$>$	-0.4790
$x_3 = 0.6$	0.8253		

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$		
$x_0 = 0$	1.000		
		$>$ -0.0995	
$x_1 = 0.2$	0.9801		$>$
		$>$ -0.2950	
$x_2 = 0.4$	0.9211		$>$
		$>$ -0.4790	
$x_3 = 0.6$	0.8253		

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & \\
 & & > & -0.2950 & & & \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & & \\
 & & > & -0.4790 & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & &
\end{array}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|lcccc}
x_i & f(x_i) & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 \\
 & & > & -0.2950 & & \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 \\
 & & > & -0.4790 & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & &
\end{array}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$					
$x_0 = 0$	1.000					
		$>$	-0.0995			
$x_1 = 0.2$	0.9801			$>$	-0.4888	
		$>$	-0.2950			$>$
$x_2 = 0.4$	0.9211			$>$	-0.4600	
		$>$	-0.4790			
$x_3 = 0.6$	0.8253					

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$			
$x_0 = 0$	1.000			
		> -0.0995		
$x_1 = 0.2$	0.9801		> -0.4888	
		> -0.2950		> 0.0480
$x_2 = 0.4$	0.9211		> -0.4600	
		> -0.4790		
$x_3 = 0.6$	0.8253			

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$			
$x_0 = 0$	1.000			
		-0.0995		
$x_1 = 0.2$	0.9801		-0.4888	
		-0.2950		0.0480
$x_2 = 0.4$	0.9211		-0.4600	
		-0.4790		
$x_3 = 0.6$	0.8253			

$$P(\cos x|0)(x) =$$
$$P(\cos x|0, 0.2)(x) =$$
$$P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) =$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & & \\
 & & > & -0.2950 & & & > & 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 & & \\
 & & > & -0.4790 & & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0)(x) &= 1.000 \\
P(\cos x|0, 0.2)(x) &= \\
P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) &=
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & & \\
 & & > & -0.2950 & & & > & 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 & & \\
 & & > & -0.4790 & & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0)(x) &= 1.000 \\
P(\cos x|0, 0.2)(x) &= 1.000 - 0.0995\, x \\
P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) &=
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$						
$x_0 = 0$	1.000						
		>	-0.0995				
$x_1 = 0.2$	0.9801			>	-0.4888		
		>	-0.2950			>	0.0480
$x_2 = 0.4$	0.9211			>	-0.4600		
		>	-0.4790				
$x_3 = 0.6$	0.8253						

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0)(x) &= 1.000 \\
P(\cos x|0, 0.2)(x) &= 1.000 - 0.0995\, x \\
P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) &= 1.000 - 0.0995\, x - 0.4888\, x\,(x - 0.2)
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & & \\
 & & > & -0.2950 & & & > & 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 & & \\
 & & > & -0.4790 & & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x) \\
&\quad =
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$			
$x_0 = 0$	1.000			
		> -0.0995		
$x_1 = 0.2$	0.9801		> -0.4888	
		> -0.2950		> 0.0480
$x_2 = 0.4$	0.9211		> -0.4600	
		> -0.4790		
$x_3 = 0.6$	0.8253			

$$P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x)$$
$$= P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x)$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & & \\
 & & > & -0.2950 & & & > & 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 & & \\
 & & > & -0.4790 & & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x) \\
&\qquad = P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.0480\, x\,(x-0.2)\,(x-0.4) \\
&\qquad =
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$			
$x_0 = 0$	1.000			
		> -0.0995		
$x_1 = 0.2$	0.9801		> -0.4888	
		> -0.2950		> 0.0480
$x_2 = 0.4$	0.9211		> -0.4600	
		> -0.4790		
$x_3 = 0.6$	0.8253			

$$
\begin{aligned}
&P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x) \\
&\quad = P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.0480\, x\,(x-0.2)\,(x-0.4) \\
&\quad = 1.000 - 0.0995\, x - 0.4888\, x\,(x-0.2) \\
&\qquad\qquad + 0.0480\, x\,(x-0.2)\,(x-0.4)
\end{aligned}
$$

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h. hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab (konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h. hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab (konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

(ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \ldots, x_k]Q = 0$

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h. hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab (konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

(ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \ldots, x_k]Q = 0$

(iii) Für die Knotenpolynome ω_k gilt

$$[x_0, \ldots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \text{ für } j, k = 0, \ldots, n.$$

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h. hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab (konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

(ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \ldots, x_k]Q = 0$

(iii) Für die Knotenpolynome ω_k gilt

$$[x_0, \ldots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \text{ für } j, k = 0, \ldots, n.$$

(iv) Sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i,\ b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i,$

$I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert ein $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ hat unterschiedliche Darstellungen abhängig von der Wahl der Basis in Π_n:

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_{jn}(x), \quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ hat unterschiedliche Darstellungen abhängig von der Wahl der Basis in Π_n:

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_{jn}(x), \quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

2. monomiale Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \qquad V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ hat unterschiedliche Darstellungen abhängig von der Wahl der Basis in Π_n:

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_{jn}(x), \quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

2. monomiale Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \qquad V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

3. Newtonsche Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \dots, x_j] f \, \omega_j(x),$$ Knotenpolynome ω_j

und $[x_0, \dots, x_n]f = \dfrac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$

Translationsinvarianz-Eigenschaft

Translationsinvarianz: das Interpolationspolynom zu den um d verschobenen Daten $(x_j + d, f(x_j))$ ist gerade das um d verschobene ursprungliche Polynom.
$\Rightarrow \kappa_{\mathbf{Leb}}$ hängt nicht von einer Verschiebung $[a, b] \to [a + d, b + d]$ ab.

Translationsinvarianz-Eigenschaft

Translationsinvarianz: das Interpolationspolynom zu den um d verschobenen Daten $(x_j + d, f(x_j))$ ist gerade das um d verschobene ursprungliche Polynom.
$\Rightarrow \kappa_{\mathrm{Leb}}$ hängt nicht von einer Verschiebung $[a, b] \to [a + d, b + d]$ ab.

Skalarprodukt auf $I_d = [a + d, b + d]$: $(f, g)_{I_d} = \int_{a+d}^{b+d} f(t)g(t)\,dt$.

Konditionszahl der Gram-matrix G mißt die Kondition einer Basis.
Sei $\kappa_{I_d}(G)$ die Konditionszahl der Gram-Matrix bzgl. $(\cdot, \cdot)_{I_d}$.

Translationsinvarianz-Eigenschaft

Translationsinvarianz: das Interpolationspolynom zu den um d verschobenen Daten $(x_j + d, f(x_j))$ ist gerade das um d verschobene ursprungliche Polynom.
$\Rightarrow \kappa_{\mathrm{Leb}}$ hängt nicht von einer Verschiebung $[a, b] \to [a + d, b + d]$ ab.

Skalarprodukt auf $I_d = [a + d, b + d]$: $(f, g)_{I_d} = \int_{a+d}^{b+d} f(t)g(t)\,dt$.

Konditionszahl der Gram-matrix G mißt die Kondition einer Basis.
Sei $\kappa_{I_d}(G)$ die Konditionszahl der Gram-Matrix bzgl. $(\cdot, \cdot)_{I_d}$.

- Lagrange-Basis: $\kappa_{I_d}(G)$ hängt nicht von d ab (Translationsinvarianz)
- Monomiale Basis: $\kappa_{I_d}(G)$ hängt von d ab (keine Translationsinvarianz)
- Newtonsche Basis: $\kappa_{I_d}(G)$ hängt nicht von d ab (Translationsinvarianz).

Vergleich

Basis	Koeffizienten-bestimmung	Aufwand pro Auswertung	Translations-invarianz	weitere Eigenschaft
Lagrange	Aufwand=0	$\mathcal{O}(n^2)$	$+$	nützlich für theoretische Zwecke
Monome	$\frac{2}{3}n^3$ (Gleichungssystem)	$2n$ (Horner)	$-$	Nachteile bzgl. Stabilität
Newton	$\frac{3}{2}n^2$	$3n$	$+$	einfache Aufdatierung

Fehleranalyse — Restglieddarstellung

Satz 8.22

Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen in $I = [a, b]$ und $x \in \mathbb{R}$. Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass

$$f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt.

Fehleranalyse — Restglieddarstellung

Satz 8.22

Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen in $I = [a, b]$ und $x \in \mathbb{R}$. Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass

$$f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt. Insbesondere gilt

$$\max_{y \in I} |f(y) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(y)|$$
$$\leq \max_{y \in I} \left| \prod_{j=0}^{n} (y - x_j) \right| \max_{y \in I} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert.
Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert.
Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0,1]$.

- Mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\xi \in [0,1]$

$$f(x) - P(f|0,1)(x) = -(x-0)(x-1)\frac{1}{2(1+\xi)^2}$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert.
Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0,1]$.

- Mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\xi \in [0,1]$

$$f(x) - P(f|0,1)(x) = -(x-0)(x-1)\frac{1}{2(1+\xi)^2}$$

- Da $\max_{x\in[0,1]} |(x-0)(x-1)| = \frac{1}{4}$ und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0,1)(x)| \le \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1 + x)$ wird an $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ quadratisch interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ quadratisch interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- Mit der Ableitung $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, \tfrac{1}{2}, 1)(x) = (x-0)(x-\tfrac{1}{2})(x-1)\frac{2}{3!(1+\xi)^3}$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ quadratisch interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0,1]$.

- Mit der Ableitung $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ erhält man für $\xi \in [0,1]$
$$f(x) - P(f|0,\tfrac{1}{2},1)(x) = (x-0)(x-\tfrac{1}{2})(x-1)\frac{2}{3!(1+\xi)^3}$$
- Da
$$\max_{x\in[0,1]} \left| x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right| = \frac{\sqrt{3}}{36},$$
und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler
$$|f(x) - P(f|0,0.5,1)(x)| \le \frac{1}{36\sqrt{3}}$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Definiere

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \text{ und } M_{n+1}(f) := \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Definiere

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \text{ und } M_{n+1}(f) := \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

Dann erhält man für die Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x)| \le |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

für $x \in [a, b]$ und $x_j \in [a, b]$, $j = 0, 1, 2, \dots, n.$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Definiere

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \text{ und } M_{n+1}(f) := \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

Dann erhält man für die Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

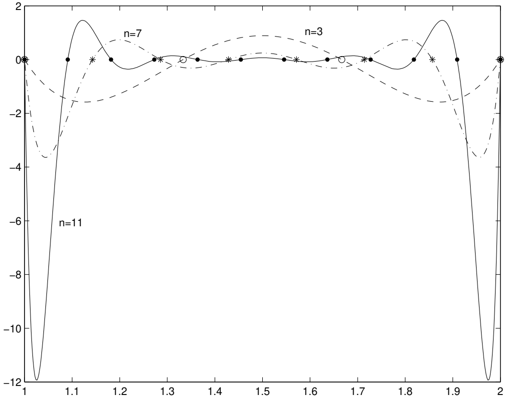
für $x \in [a, b]$ und $x_j \in [a, b]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Beachte

- $M_{n+1}(f)$ hängt nur von f ab, aber nicht von Stützstellen
- $\omega_{n+1}(x)$ hängt nur von den Stützstellen ab, aber nicht von f.

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei äquidistanten Stützstellen.
- Beispiel: $x_j = 1 + \frac{j}{n}$, $j = 0, \ldots, n$ für $n = 3, 7, 11.$



Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

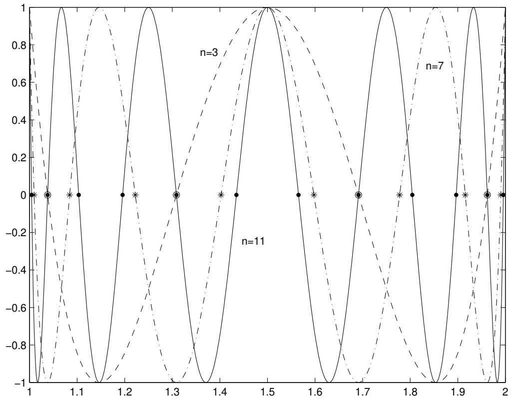
Bemerkung 8.25

- Das Verhalten der Funktion ω_{n+1} kann für eine andere Wahl der Stützstellen wesentlich besser sein.
- Die Tschebyscheff-Stützstellen sind wesentlich günstiger.
- Für diese Nullstellen gibt es explizite Formeln, z.B. für das Intervall $[1, 2]$:

$$x_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\,\pi\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- Verhalten der Funktion $\boldsymbol{\omega_{n+1}}$ bei Tschebyscheff-Stützstellen



Grenzen der Polynominterpolation

Beispiel: Runges Phänomen

- Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.

- Die Folge der Interpolationspolynome

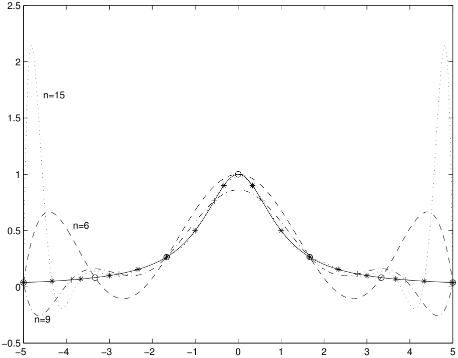
$$P_n(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$$

mit

$$x_j = -5 + 10\frac{j}{n}, \quad j = 0, \ldots, n,$$

divergiert auf $[-5, 5]$.

Grenzen der Polynominterpolation



Fazit

Als Mittel, über immer mehr Stützstellen immer bessere Appproximationen zu gewinnen, taugt die Polynominterpolation im allgemeinen nicht.

Fester Polynomgrad

Unterteile $I = [a, b]$ in Teilintervalle.
Es seien $J = [c, d]$ ein Teilintervall von I und $x_0, \ldots, x_n \in J$ paarweise verschiedene Stützstellen in J.
Es sei n fest, aber $h := d - c$ stelle man sich als veränderbar vor.
Für $x \in J$ gilt $|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1}$, und somit

$$\begin{aligned} \|f - P(f|x_0, \ldots, x_n)\|_{L_\infty(J)} &\leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(J)} \\ &\leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(I)}, \end{aligned}$$

Fester Polynomgrad

Unterteile $I = [a, b]$ in Teilintervalle.
Es seien $J = [c, d]$ ein Teilintervall von I und $x_0, \ldots, x_n \in J$ paarweise verschiedene Stützstellen in J.
Es sei n fest, aber $h := d - c$ stelle man sich als veränderbar vor.
Für $x \in J$ gilt $|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1}$, und somit

$$\begin{aligned} \|f - P(f|x_0, \ldots, x_n)\|_{L_\infty(J)} &\leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(J)} \\ &\leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(I)}, \end{aligned}$$

- Der Fehler wird kleiner, wenn die Stützstellen gemäß h zusammenrücken.

Fester Polynomgrad

Unterteile $I = [a, b]$ in Teilintervalle.
Es seien $J = [c, d]$ ein Teilintervall von I und $x_0, \ldots, x_n \in J$ paarweise verschiedene Stützstellen in J.
Es sei n fest, aber $h := d - c$ stelle man sich als veränderbar vor.
Für $x \in J$ gilt $|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1}$, und somit

$$\begin{aligned} \|f - P(f|x_0, \ldots, x_n)\|_{L_\infty(J)} &\leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(J)} \\ &\leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(I)}, \end{aligned}$$

- Der Fehler wird kleiner, wenn die Stützstellen gemäß h zusammenrücken.

Dieser Effekt wird in den meisten Anwendungen benutzt.

Beispiel 8.26

Die Funktion $f(x) = \log(1 + x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h.

Beispiel 8.26

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h.

- Wir erhalten

$$f(x) - P(f|0,h)(x) = -(x-0)(x-h)\frac{1}{2(1+\xi)^2}$$

Beispiel 8.26

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h.

- Wir erhalten

$$f(x) - P(f|0,h)(x) = -(x-0)(x-h)\frac{1}{2(1+\xi)^2}$$

- Da $\max_{x\in[0,h]} |(x-0)(x-h)| = \frac{h^2}{4}$ und $\xi > 0$ folgt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0,h)(x)| \leq \frac{h^2}{8}, \quad \text{für } x \in [0,h]$$

Beispiel 8.26

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h.

- Wir erhalten

$$f(x) - P(f|0,h)(x) = -(x-0)(x-h)\frac{1}{2(1+\xi)^2}$$

- Da $\max_{x\in[0,h]} |(x-0)(x-h)| = \frac{h^2}{4}$ und $\xi > 0$ folgt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0,h)(x)| \leq \frac{h^2}{8}, \quad \text{für } x \in [0,h]$$

- Der Verfahrensfehler strebt also mit der Ordnung 2 gegen 0.

Hermite-Interpolationsaufgabe

Für festes x_0 sind $\mu_0(f) := f(x_0)$, $\mu_1(f) := f'(x_0)$ lineare Funktionale.

Allgemeiner, zu den Stützstellen

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n,$$

definiere für $j = 0, 1, \ldots, n$:

$$\mu_j(f) := f^{(\ell_j)}(x_j), \quad \ell_j := \max\{r \in \mathbb{N} \mid x_j = x_{j-r}\}.$$

Hermite-Interpolationsaufgabe

Für festes x_0 sind $\mu_0(f) := f(x_0)$, $\mu_1(f) := f'(x_0)$ lineare Funktionale.

Allgemeiner, zu den Stützstellen

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n,$$

definiere für $j = 0, 1, \ldots, n$:

$$\mu_j(f) := f^{(\ell_j)}(x_j), \quad \ell_j := \max\{r \in \mathbb{N} \mid x_j = x_{j-r}\}.$$

Hermite-Interpolationsaufgabe

Es seien $f \in C^k([a,b])$ und μ_j wie oben mit $x_j \in [a,b]$ und $\ell_j \leq k$ für alle j. Man bestimme $P_n \in \Pi_n$, so dass

$$\mu_j(P_n) = \mu_j(f), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Hermite-Interpolationsaufgabe

Satz 8.30

Die Hermite-Interpolationsaufgabe hat eine eindeutige Lösung.

Hermite-Interpolationsaufgabe

Satz 8.30

Die Hermite-Interpolationsaufgabe hat eine eindeutige Lösung.

Notation:
für beliebige reelle Stützstellen x_i, $i = 0, \ldots, n$, wird mit $[x_i, \ldots, x_k]f$ der führende Koeffizient des entsprechenden Hermite-Interpolationspolynoms $P(f|x_i, \ldots, x_k) \in \Pi_{k-i}$ bezeichnet.

Hermite-Interpolationsaufgabe

Satz 8.30

Die Hermite-Interpolationsaufgabe hat eine eindeutige Lösung.

Notation:
für beliebige reelle Stützstellen x_i, $i = 0, \ldots, n$, wird mit $[x_i, \ldots, x_k]f$ der führende Koeffizient des entsprechenden Hermite-Interpolationspolynoms $P(f|x_i, \ldots, x_k) \in \Pi_{k-i}$ bezeichnet.

Folgerung 8.32

Für $x_0 = \cdots = x_k$, $k \geq 0$, gilt

$$[x_0, \ldots, x_k]f = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Bestimmung des Interpolationspolynoms

Die Lösung in der Newtonschen Basis

Die Lösung der Hermite-Interpolationsaufgabe hat die Darstellung:

$$
\begin{aligned}
&P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \\
&= [x_0]f + [x_0,x_1]f\cdot(x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f\cdot(x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad + \ldots + [x_0,\ldots,x_n]f\cdot(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Bestimmung des Interpolationspolynoms

Die Lösung in der Newtonschen Basis

Die Lösung der Hermite-Interpolationsaufgabe hat die Darstellung:

$$\begin{aligned} &P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \\ &= [x_0]f + [x_0,x_1]f\cdot(x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f\cdot(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \dots + [x_0,\dots,x_n]f\cdot(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Lemma 8.33

Gegeben seien $x_0,\dots,x_k \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $i,j \in \{0,\dots,k\}$:

$$[x_0,\dots,x_k]f = \begin{cases} \frac{[x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_k]f - [x_0,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_k]f}{x_j - x_i}, & x_i \neq x_j \\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & \text{falls} \quad x_0 = \dots = x_k, \end{cases}$$

Beispiel 8.35

Es sei $x_0 = 0, x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1$. Man bestimme $P_4 = P(f|0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, so dass

$$P_4(0) = 1,\ P_4(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2},\ P_4'(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2},\ P_4''(\tfrac{1}{2}) = 0,\ P_4(1) = \tfrac{5}{2}.$$

Beispiel 8.35

Es sei $x_0 = 0, x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1$. Man bestimme $P_4 = P(f|0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, so dass

$$P_4(0) = 1,\ P_4(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2},\ P_4'(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2},\ P_4''(\tfrac{1}{2}) = 0,\ P_4(1) = \tfrac{5}{2}.$$

0	1				
		1			
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$		-1		
		$\frac{1}{2}$		2	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$		0		4
		$\frac{1}{2}$		6	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$		3		
		2			
1	$\frac{5}{2}$				

Beispiel 8.35

Es sei $x_0 = 0, x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1$. Man bestimme $P_4 = P(f|0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, so dass

$$P_4(0) = 1,\ P_4(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2},\ P_4'(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2},\ P_4''(\tfrac{1}{2}) = 0,\ P_4(1) = \tfrac{5}{2}.$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
\hline
0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & > & 1 & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & & & > & -1 & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & & > & 2 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & & & & 0 & & & > & 4 \\
 & & & \frac{1}{2} & & & > & 6 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & & & > & 3 & & & & \\
 & & > & 2 & & & & & & \\
1 & \frac{5}{2} & & & & & & & &
\end{array}$$

$$P_4(x) = 1 + x - x(x - \tfrac{1}{2}) + 2x(x - \tfrac{1}{2})^2 + 4x(x - \tfrac{1}{2})^3.$$

Verfahrensfehler bei Hermite-Interpolation

Die Fehlerdarstellung aus Satz 8.22 bleibt unverändert gültig:

Verfahrensfehler

Seien $x_0, \ldots, x_n$ (nicht notwendigerweise paarweise verschiedene) Stützstellen in $I = [a, b]$ und $x \in \mathbb{R}$.
Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass

$$f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)\right) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt.

Verfahrensfehler bei Hermite-Interpolation

Die Fehlerdarstellung aus Satz 8.22 bleibt unverändert gültig:

Verfahrensfehler

Seien $x_0, \ldots, x_n$ (nicht notwendigerweise paarweise verschiedene) Stützstellen in $I = [a, b]$ und $x \in \mathbb{R}$.
Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass

$$f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt. Insbesondere gilt

$$\max_{y \in I} |f(y) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(y)| \leq \max_{y \in I} \left| \prod_{j=0}^{n} (y - x_j) \right| \max_{y \in I} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}$$

Numerische Differentiation

Zur Erinnerung: In der Newton-Interpolationsformel ist

$$\delta_n := [x_0, \dots, x_n]f$$

der Koeffizient der Potenz x^n. Daraus folgt

$$P(f|x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n![x_0, \dots, x_n]f \approx f^{(n)}(x).$$

Numerische Differentiation

Zur Erinnerung: In der Newton-Interpolationsformel ist

$$\delta_n := [x_0, \ldots, x_n]f$$

der Koeffizient der Potenz x^n. Daraus folgt

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) = n![x_0, \ldots, x_n]f \approx f^{(n)}(x).$$

1. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$f'(x) \approx [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad \big(x \in [x_0, x_1]\big).$$

Numerische Differentiation

Zur Erinnerung: In der Newton-Interpolationsformel ist

$$\delta_n := [x_0, \ldots, x_n]f$$

der Koeffizient der Potenz x^n. Daraus folgt

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) = n![x_0, \ldots, x_n]f \approx f^{(n)}(x).$$

1. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$f'(x) \approx [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad \big(x \in [x_0, x_1]\big).$$

Mit Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - \frac{1}{2}h$, $x_1 = x + \frac{1}{2}h$,

$$f'(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi)$$

Numerische Differentiation

2. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$
\begin{aligned}
f''(x) &\approx 2![x_0, x_1, x_2]f \\
&= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \quad \big(x \in [x_0, x_2]\big).
\end{aligned}
$$

Numerische Differentiation

2. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$
\begin{aligned}
f''(x) &\approx 2![x_0, x_1, x_2]f \\
&= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \quad (x \in [x_0, x_2]).
\end{aligned}
$$

Mit Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - h$, $x_1 = x$, $x_2 = x + h$,

$$
f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\ f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)
$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Differenzenquotient

$$\Delta_h := \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Differenzenquotient

$$\Delta_h := \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

- Fehler in den Daten, $\tilde{f} \approx f$:

$$\widetilde{\Delta}_h := \frac{\tilde{f}(x+h)-2\tilde{f}(x)+\tilde{f}(x-h)}{h^2}$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Differenzenquotient

$$\Delta_h := \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

- Fehler in den Daten, $\tilde{f} \approx f$:

$$\widetilde{\Delta}_h := \frac{\tilde{f}(x+h)-2\tilde{f}(x)+\tilde{f}(x-h)}{h^2}$$

- Fehler in Δ_h aufgrund von Datenfehler $(|f(y)-\tilde{f}(y)| \leq \epsilon)$

$$\begin{aligned}\left|\Delta_h - \widetilde{\Delta}_h\right| = \frac{1}{h^2}\Big|\big(f(x+h)-\tilde{f}(x+h)\big) - 2\big(f(x)-\tilde{f}(x)\big) \\ +\big(f(x-h)-\tilde{f}(x-h)\big)\Big| \leq \frac{4\epsilon}{h^2}\end{aligned}$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Differenzenquotient

$$\boldsymbol{\Delta}_h := \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

- Fehler in den Daten, $\tilde{f} \approx f$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_h := \frac{\tilde{f}(x+h) - 2\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-h)}{h^2}$$

- Fehler in $\boldsymbol{\Delta}_h$ aufgrund von Datenfehler ($|f(y) - \tilde{f}(y)| \leq \epsilon$)

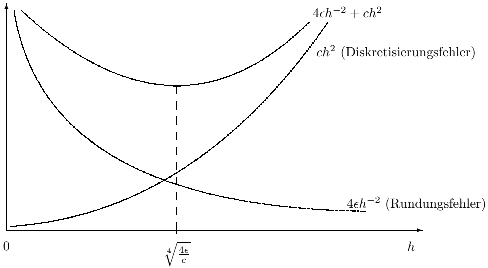
$$\left|\boldsymbol{\Delta}_h - \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_h\right| = \frac{1}{h^2}\Big|\big(f(x+h) - \tilde{f}(x+h)\big) - 2\big(f(x) - \tilde{f}(x)\big) + \big(f(x-h) - \tilde{f}(x-h)\big)\Big| \leq \frac{4\epsilon}{h^2}$$

Gesamtfehler

$$\left|\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_h - f''(x)\right| \leq \left|\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_h - \boldsymbol{\Delta}_h\right| + |\boldsymbol{\Delta}_h - f''(x)| \leq \frac{4\epsilon}{h^2} + c\,h^2$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Die Schranke wird für $h = \sqrt[4]{4\epsilon/c}$ minimal.
- Bsp: $\epsilon = 10^{-9} \Rightarrow h \approx 10^{-2}$, kleineres h vergrößert Fehler



Merke

Man sollte stets dafür sorgen, dass Rundungsfehler einen kleineren Einfluß haben als Diskretisierungsfehler.

Beispiel 8.37

Aufgabe

Annäherung der zweiten Abteilung von $f(x) = \sin x + 3x^2$ an der Stelle $x = 0.6$ mit dem Differenzquotienten

$$\Delta_h = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- Wir rechnen auf einer Maschine mit $\mathrm{eps} \approx 10^{-16}$
- Man erwartet, dass für $h \approx 10^{-4}$ der Gesamtfehler minimal ist
- Die Tabelle bestätigt dies:

h	$\tilde{\Delta}_h$	$\lvert\tilde{\Delta}_h - f''(x)\rvert$
10^{-2}	$\underline{5.4353}622319$	4.71e-06
10^{-3}	$\underline{5.43535757}38$	4.72e-08
10^{-4}	$\underline{5.435357497}4$	2.92e-08
10^{-5}	$\underline{5.43535566}092$	9.17e-07
10^{-6}	$\underline{5.4352}078394$	1.50e-04
10^{-7}	$\underline{5.44}00928207$	4.74e-03

Fourier Analyse

Zerlegung periodischer Vorgänge in Grundschwingungen etwa des Typs $e_j(x) := e^{ijx}$, wobei i die komplexe Einheit mit $i^2 = -1$.
Der Einfachheit halber wird die Periode als 2π angenommen.

Skalarprodukt und Norm:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad \|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Fourier Analyse

Zerlegung periodischer Vorgänge in Grundschwingungen etwa des Typs $e_j(x) := e^{ijx}$, wobei i die komplexe Einheit mit $i^2 = -1$.
Der Einfachheit halber wird die Periode als 2π angenommen.

Skalarprodukt und Norm:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad \|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Orthonormalsystem

$$\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-ikx} dx = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Reihe

Fourier-Teilsumme

$$\boldsymbol{S_n(f;x) := \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}}$$

$$\boldsymbol{\hat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx}$$

Mit $\boldsymbol{U_{2n+1} := \mathrm{span}\{\, e_k \mid |k| \leq n \,\}}$ gilt

$$\boldsymbol{\|f - S_n(f;\cdot)\|_2 = \min\{\|f - u\|_2 \mid u \in U_{2n+1}\,\}}$$

Fourier-Reihe

Fourier-Teilsumme

$$S_n(f;x) := \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

$$\hat{f}(k) := \langle f, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Mit $U_{2n+1} := \mathrm{span}\{\, e_k \mid |k| \leq n \,\}$ gilt

$$\|f - S_n(f;\cdot)\|_2 = \min\{\|f-u\|_2 \mid u \in U_{2n+1}\,\}$$

Für $f \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ (Raum der quadratisch integrierbaren 2π-periodischen Funktionen) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f;\cdot)\|_2 = 0.$$

Reelle Darstellung

Sei f reellwertig. Es gilt

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right),$$

mit

$$\alpha_0 := \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$\alpha_k := 2\,\mathrm{Re}\hat{f}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$\beta_k := -2\,\mathrm{Im}\hat{f}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

Beispiel 8.40

Sei $f(x) = 1$ für $x \in [1, 2]$ und $f(x) = 0$ für $x \in [0, 2\pi] \setminus [1, 2]$.
Fourier-Koeffizienten:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{k\pi} \sin(\frac{1}{2}k) e^{-i\frac{3}{2}k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \; k \neq 0,$$

und $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}$.

Beispiel 8.40

Sei $f(x) = 1$ für $x \in [1,2]$ und $f(x) = 0$ für $x \in [0, 2\pi] \setminus [1,2]$.
Fourier-Koeffizienten:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{k\pi} \sin(\frac{1}{2}k) e^{-i\frac{3}{2}k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \; k \neq 0,$$

und $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}$. Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha_k = \frac{2}{k\pi} \sin(\tfrac{1}{2}k) \cos(\tfrac{3}{2}k), \quad \beta_k = \frac{2}{k\pi} \sin(\tfrac{1}{2}k) \sin(\tfrac{3}{2}k),$$

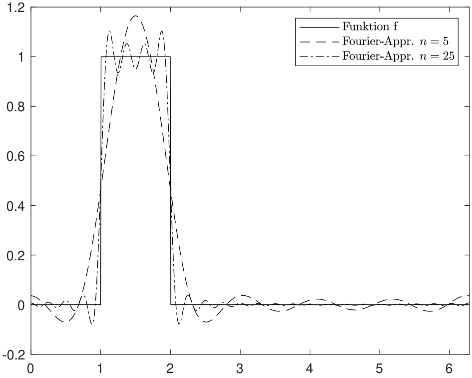
und damit die Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2\pi} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tfrac{1}{k\pi} \sin(\tfrac{1}{2}k) e^{-i\frac{3}{2}k} e^{ikx} \\ &= \tfrac{1}{2\pi} + \tfrac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \sin(\tfrac{1}{2}k) \big[\cos(\tfrac{3}{2}k) \cos(kx) + \sin(\tfrac{3}{2}k) \sin(kx) \big] \end{aligned}$$

Beispiel 8.40

Sei $f(x) = 1$ für $x \in [1,2]$ und $f(x) = 0$ für $x \in [0, 2\pi] \setminus [1,2]$.

Fourier-Teilsumme $S_n(f;\cdot)$, $n = 5, 25$:



Genauigkeit von $S_n(f;\cdot)$

$L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$: quadratisch integrierbare 2π-periodische Funktionen.

Lemma 8.42

Falls $f^{(r)} \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ gilt, folgt

$$\|f - S_n(f;\cdot)\|_2 \leq n^{-r}\|f^{(r)}\|_2$$

Fourier-Transformation

$L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$: quadratisch integrierbare 2π-periodische Funktionen.

$$\ell_2 := \left\{ d := (d_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid d_k \in \mathbb{C},\ \|d\|_2 := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_k|^2\right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Fourier-Transformation

$$F:\ L_{2,2\pi}(\mathbb{R}) \to \ell_2, \quad F(f) := \left(\hat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

Fourier-Transformation

$L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$: quadratisch integrierbare 2π-periodische Funktionen.

$$\ell_2 := \left\{ d := (d_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid d_k \in \mathbb{C},\ \|d\|_2 := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_k|^2\right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Fourier-Transformation

$$F:\ L_{2,2\pi}(\mathbb{R}) \to \ell_2, \quad F(f) := \left(\hat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

Fourier-Transformation und Ableitungen

Die Ableitung einer Fourier-Transformierten kann durch Multiplikation dieser mit der Frequenzzahl ik vereinfacht dargestellt werden:

$$\widehat{f'}(k) = (ik)\hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Transformation

Faltungsoperator:

Sei g eine gegebene 2π-periodische Funktion.

$$(g * f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y) f(y) dy,$$

Die Funktion $g * f$ heißt Faltung von f und g.

Fourier-Transformation

Faltungsoperator:

Sei g eine gegebene 2π-periodische Funktion.

$$(g * f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y) f(y) dy,$$

Die Funktion $g * f$ heißt Faltung von f und g.

Fourier-Transformation und Faltungen

Die Fourier-Transformation “verträgt” sich gut mit Faltungen:
Für $f, g \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ gilt

$$(\widehat{g * f})(k) = \hat{g}(k) \cdot \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Trigonometrische Interpolation

Variante der Lagrange-Interpolationsaufgabe, wobei wir den Funktionenraum

$$\mathcal{T}_m := \{\, x \to \sum_{j=0}^{m-1} c_j e^{ijx} \mid c_j \in \mathbb{C} \,\} = \mathbf{span}\{\, e_j \mid 0 \le j < m \,\}$$

der Dimension m verwenden.

Trigonometrische Interpolation

Variante der Lagrange-Interpolationsaufgabe, wobei wir den Funktionenraum

$$\mathcal{T}_m := \{\, x \to \sum_{j=0}^{m-1} c_j e^{ijx} \mid c_j \in \mathbb{C} \,\} = \mathrm{span}\{\, e_j \mid 0 \le j < m \,\}$$

der Dimension m verwenden.

Trigonometrische Interpolationsaufgabe

Es sei $x_k = 2\pi k/n$. Finde zu Daten $f_j = f(x_j) \in \mathbb{C}$, $j = 0, \ldots, n-1$, ein $T_n \in \mathcal{T}_n$, so dass

$$T_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Beachte: man verwendet n (statt $n+1$) Stützstellen.

Trigonometrische Interpolation

Notation: eine n-te Einheitswurzel $\varepsilon_n := e^{-2\pi i/n}$.

Satz 4.48

Zu $x_k = 2\pi k/n$, $k = 0, \ldots, n-1$, definiere für $0 \leq j \leq n-1$,

$$d_j(f) := \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(x_l)\varepsilon_n^{lj} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(x_l) e^{-ijx_l}$$

Dann ist das trigonometrische Polynom

$$T_n(f; x) := \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

die eindeutige Lösung der obigen Interpolationsaufgabe.

Trigonometrische Interpolation

Es seien $z_k = e^{ix_k} = e^{ik2\pi/n} = \bar{\varepsilon}_n^k,\ k = 0, \ldots, n-1$, die n äquidistanten Stützstellen auf dem Einheitskreis.

$$V_{n-1} := \begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^{n-1} \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & z_{n-1}^2 & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

die diesen Stützstellen entsprechende Vandermonde-Matrix.

Trigonometrische Interpolation

Es seien $z_k = e^{ix_k} = e^{ik2\pi/n} = \bar{\varepsilon}_n^k,\ k = 0, \ldots, n-1$, die n äquidistanten Stützstellen auf dem Einheitskreis.

$$V_{n-1} := \begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^{n-1} \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & z_{n-1}^2 & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

die diesen Stützstellen entsprechende Vandermonde-Matrix.

Eigenschaften der Vandermonde-Matrix

Die Matrix V_{n-1} ist bis auf Skalierung unitär: $V_{n-1}^* V_{n-1} = nI$.
Daraus folgt $\kappa_2(V_{n-1}) = 1$.

Herleitung der Lösungsdarstellung

Die Funktion $T(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx}$ löst die Interpolationsaufgabe genau dann wenn

$$V_{n-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Es gilt $V_{n-1}^{-1} = \frac{1}{n} \overline{V}_{n-1}$.

Herleitung der Lösungsdarstellung

Die Funktion $T(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx}$ löst die Interpolationsaufgabe genau dann wenn

$$V_{n-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Es gilt $V_{n-1}^{-1} = \frac{1}{n}\overline{V}_{n-1}$. Aus

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\overline{V}_{n-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

erhält man $c_j = d_j(f)$.

Diskrete Fourier-Transformation

Die lineare Abbildung

$$F_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$
$$F_n(f(x_0), \ldots, f(x_{n-1}))^T = (d_0(f), \ldots, d_{n-1}(f))^T,$$

wird als diskrete Fourier-Transformation (der Länge n) bezeichnet.

Diskrete Fourier-Transformation

Die lineare Abbildung

$$F_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$
$$F_n(f(x_0), \ldots, f(x_{n-1}))^T = (d_0(f), \ldots, d_{n-1}(f))^T,$$

wird als diskrete Fourier-Transformation (der Länge n) bezeichnet.

Zugehörige Matrix:

$$\mathbf{F}_n := \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_n^1 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_n^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fourier-Transformation

Mit $\mathbf{f} := (f(x_0), \ldots, f(x_n))^T \in \mathbb{C}^n$,
$\mathbf{d} := (d_0(f), \ldots, d_{n-1}(f))^T \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\mathbf{F}_n \mathbf{f} = \mathbf{d} \quad \text{(diskrete Fourier-Transformation)}$$

Diskrete Fourier-Transformation

Mit $\mathbf{f} := (f(x_0), \ldots, f(x_n))^T \in \mathbb{C}^n$,
$\mathbf{d} := (d_0(f), \ldots, d_{n-1}(f))^T \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\mathbf{F}_n \mathbf{f} = \mathbf{d} \quad \text{(diskrete Fourier-Transformation)}$$

Satz 8.50

Die diskrete Fourier-Transformationsmatrix $\mathbf{F}_n$ ist bis auf Skalierung unitär:

$$\mathbf{F}_n^* \mathbf{F}_n = \frac{1}{n} I.$$

Beweis: $\mathbf{F}_n$ stimmt bis auf Skalierung mit der konjugierten Vandermonde-Matrix überein: $\mathbf{F}_n = \frac{1}{n} \overline{V}_{n-1}$.

Kondition der Interpolationsaufgabe

Sie $T_n(\tilde{f})$ das trigonometrische Interpolationspolynom zu gestörten Daten $\tilde{f}(x_k) \approx f(x_k)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Kondition

$$\frac{\|T_n(\tilde{f}) - T_n(f)\|_2}{\|T_n(f)\|_2} = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{f}(x_j) - f(x_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |f(x_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die gute Kondition ist im Wesentlichen eine Konsequenz der Eigenschaft

$$\kappa_2(\mathbf{F}_n) = \|\mathbf{F}_n\|_{\mathbb{C}} \| \|\mathbf{F}_n^{-1}\|_{\mathbb{C}} = 1$$

(wobei $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ die Matrixnorm zu $\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{C}}^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}$ ist)

Reelle trigonometrische Interpolation

Wir nehmen nun an, dass die Daten $f(x_k),\ k = 0, \ldots, n-1$, reell sind.
Frage: (Wie) können bei der Lösung der Interpolationsaufgabe komplexe Zahlen vermieden werden?

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $n = 2p + 1$ ungerade ist.

Reelle trigonometrische Interpolation

Wir nehmen nun an, dass die Daten $f(x_k),\ k = 0, \ldots, n-1$, reell sind.
Frage: (Wie) können bei der Lösung der Interpolationsaufgabe komplexe Zahlen vermieden werden?

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $n = 2p + 1$ ungerade ist.

Wir benutzen den reellen Raum

$$\hat{\mathcal{T}}_{2p+1} := \left\{ \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) \mid \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Reelle trigonometrische Interpolation

Wir nehmen nun an, dass die Daten $f(x_k),\ k = 0, \ldots, n-1$, reell sind.
Frage: (Wie) können bei der Lösung der Interpolationsaufgabe komplexe Zahlen vermieden werden?

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $n = 2p + 1$ ungerade ist.

Wir benutzen den reellen Raum

$$\hat{\mathcal{T}}_{2p+1} := \left\{ \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) \mid \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Reelle Interpolationsaufgabe

Es sei $x_k = 2\pi k/n$. Finde zu Daten $f(x_k) \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n-1$, $n = 2p + 1$, eine Funktion $\hat{T}_n \in \hat{\mathcal{T}}_n$, so dass

$$\hat{T}_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Reelle trigonometrische Interpolation

Satz 8.56

Es sei n ungerade. Definiere

$$A_j(f) := \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f(x_l)\cos jx_l, \quad j \geq 0,$$

$$B_j(f) := \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f(x_l)\sin jx_l, \quad j \geq 1.$$

Die reelle trigonometrische Funktion

$$\hat{T}_n(f;x) := \frac{1}{2}A_0(f) + \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(A_j(f)\cos jx + B_j(f)\sin jx\right)$$

ist die eindeutige Lösung der reellen Interpolationsaufgabe.

Reelle trigonometrische Interpolation

Zusammenhang zwischen der komplexen und reellen trigonometrischen Interpolation?

Lemma 5.58

Für ungerades n, $p := \frac{1}{2}(n-1)$ gilt:

$$\begin{aligned}
A_0(f) &= 2d_0(f) \\
A_j(f) &= d_j(f) + d_{n-j}(f), \quad j = 1, \ldots, p, \\
B_j(f) &= i(d_j(f) - d_{n-j}(f)), \quad j = 1, \ldots, p.
\end{aligned}$$

Reelle trigonometrische Interpolation

Zusammenhang zwischen der komplexen und reellen trigonometrischen Interpolation?

Lemma 5.58

Für ungerades n, $p := \frac{1}{2}(n-1)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
A_0(f) &= 2d_0(f) \\
A_j(f) &= d_j(f) + d_{n-j}(f), \quad j = 1, \dots, p, \\
B_j(f) &= i(d_j(f) - d_{n-j}(f)), \quad j = 1, \dots, p.
\end{aligned}
$$

- Analoge Resultate gibt es für gerades n.

Reelle trigonometrische Interpolation

Zusammenhang zwischen der komplexen und reellen trigonometrischen Interpolation?

Lemma 5.58

Für ungerades n, $p := \frac{1}{2}(n-1)$ gilt:

$$\begin{aligned} A_0(f) &= 2d_0(f) \\ A_j(f) &= d_j(f) + d_{n-j}(f), \quad j = 1, \dots, p, \\ B_j(f) &= i(d_j(f) - d_{n-j}(f)), \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

- Analoge Resultate gibt es für gerades n.
- Die trigonometrischen Funktionen $\hat{T}_n(f)$ (reell) und $T_n(f)$ (komplex) stimmen an den Stützstellen $x_k = 2\pi k/n$, $k = 0, \dots, n-1$, überein, im Allgemeinen jedoch nicht für $x \neq x_k$.

Fast Fourier Transform (FFT)

Sei $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine n-periodische Folge.
Es ist bequem, die Folge auf einen Abschnitt $(y_j)_{j=0}^{n-1}$ zu beschränken.
Wir betrachten die Fourier-Transformation

$$F_n : \mathbf{y} \to \mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{y})$$

Fast Fourier Transform (FFT)

Sei $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine n-periodische Folge.
Es ist bequem, die Folge auf einen Abschnitt $(y_j)_{j=0}^{n-1}$ zu beschränken.
Wir betrachten die Fourier-Transformation

$$F_n : \mathbf{y} \to \mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{y})$$

Lemmma 8.61

Die diskrete Fourier-Transformation F_n hat eine Inverse F_n^{-1} definiert durch

$$(F_n^{-1}\mathbf{d})_j = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \varepsilon_n^{-jk} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k e^{2\pi ijk/n}, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Fast Fourier Transform (FFT)

In Matrixformulierung:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{d} = n\overline{\mathbf{F}}_n\mathbf{d} = n\overline{\mathbf{F}_n\overline{\mathbf{d}}}$$

Fast Fourier Transform (FFT)

In Matrixformulierung:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{d} = n\overline{\mathbf{F}}_n\mathbf{d} = n\overline{\mathbf{F}_n\overline{\mathbf{d}}}$$

Folgerung

Die Auswertung der inversen Fourier-Transformation, D.h. die Berechnung von $\mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{d}$, kann also auf die Auswertung von $\mathbf{F}_n\overline{\mathbf{d}}$ zurückgeführt werden.

Fast Fourier Transform (FFT)

In Matrixformulierung:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{d} = n\overline{\mathbf{F}}_n\mathbf{d} = n\overline{\mathbf{F}_n\overline{\mathbf{d}}}$$

Folgerung

Die Auswertung der inversen Fourier-Transformation, D.h. die Berechnung von $\mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{d}$, kann also auf die Auswertung von $\mathbf{F}_n\overline{\mathbf{d}}$ zurückgeführt werden.

Anwendungen der diskreten Fourier-Transfornation F_n:

- Komplexe trigonometrische Interpolation
- Reelle trigonometrische Interpolation
- Diskrete Faltung

Fast Fourier Transform (FFT)

Auf den ersten Blick erfordert die Berechnung der diskreten Fourier-Transformation $2n^2$ Flop ($n-1$ Additionen und n Multiplikationen pro Eintrag).

Erhebliche Aufwandsreduktion: schnelle Fourier-Transformation (FFT).

Fast Fourier Transform (FFT)

Auf den ersten Blick erfordert die Berechnung der diskreten Fourier-Transformation $2n^2$ Flop ($n-1$ Additionen und n Multiplikationen pro Eintrag).

Erhebliche Aufwandsreduktion: schnelle Fourier-Transformation (FFT).

Grundprinzip FFT

Annahme: die Periodenlänge $n = 2m$ ist gerade.
Es gelten folgende Beziehungen:

$$d_{2k} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2}(y_j + y_{j+m})\varepsilon_m^{kj}, \quad 0 \le k \le m$$

$$d_{2k+1} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2}(y_j - y_{m+j})\varepsilon_{2m}^{j}\,\varepsilon_m^{kj}, \quad 0 \le k \le m-1.$$

Fast Fourier Transform (FFT)

$\Rightarrow$ Die diskrete Fourier-Transformation der Länge $n = 2m$ lässt such auf die Durchführung von zwei diskreten Fourier-Transformationen der halben Länge m zurückführen.

Fast Fourier Transform (FFT)

$\Rightarrow$ Die diskrete Fourier-Transformation der Länge $n = 2m$ lässt such auf die Durchführung von zwei diskreten Fourier-Transformationen der halben Länge m zurückführen.

Die Bestimmung der neuen Folgenglieder $\frac{1}{2}(y_j + y_{j+m})$ und $\frac{1}{2}(y_j - y_{m+j})\varepsilon_{2m}^j$ erfordert (bei Vorabberechnung von $\varepsilon_{2m}^j/2$) jeweils $2m$, also insgesamt $4m = 2n$ Flop.

Fast Fourier Transform (FFT)

$\Rightarrow$ Die diskrete Fourier-Transformation der Länge $n = 2m$ lässt such auf die Durchführung von zwei diskreten Fourier-Transformationen der halben Länge m zurückführen.

Die Bestimmung der neuen Folgenglieder $\frac{1}{2}(y_j + y_{j+m})$ und $\frac{1}{2}(y_j - y_{m+j})\varepsilon_{2m}^{j}$ erfordert (bei Vorabberechnung von $\varepsilon_{2m}^{j}/2$) jeweils $2m$, also insgesamt $4m = 2n$ Flop.

Diese Prozedur kann man L mal rekursiv wiederholen, wenn $n = 2^L$ gilt.

Satz 8.64

Für $n = 2^L$ ist der Aufwand des FFT-Algorithmus

$$2n \log_2(n) \quad \text{Flop}$$

Dieses Aufwandverhalten lässt sich im Wesentlichen auch noch realisieren, wenn n keine Potenz von 2 mehr ist.