

Kapitel 9

Buch Dahmen-Reusken

RWTH Aachen University

2022

Einleitung

Allgemeine Interpolationsaufgabe

Gegeben seien Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, und Daten

$$f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}.$$

Es sei G_n ein endlich dimensionaler Raum stetiger Funktionen (dessen Dimension von n abhängt). Man bestimme $g_n \in G_n$, so dass

$$g_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

Einleitung

Allgemeine Interpolationsaufgabe

Gegeben seien Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, und Daten

$$f(x_0), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}.$$

Es sei G_n ein endlich dimensionaler Raum stetiger Funktionen (dessen Dimension von n abhängt). Man bestimme $g_n \in G_n$, so dass

$$g_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

In diesem Kapitel ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$):

$$G_n := \left\{ g \in C^{k-2}([x_0, x_n]) \mid g|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_{k-1} \right\}, \quad k \geq 2$$

Kubische Splines

Stützstellen: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Daten: $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Raum der **kubischen Splines**:

$$\mathcal{P}_{4,\tau} := \left\{ g \in C^2([a, b]) \mid g|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, i = 0, 1, \dots, n - 1 \right\}$$

Kubische Splines

Stützstellen: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Daten: $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Raum der **kubischen Splines**:

$$\mathcal{P}_{4,\tau} := \left\{ g \in C^2([a, b]) \mid g|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Es gilt: $\dim(\mathcal{P}_{4,\tau}) = n + 3$.

Kubische Splineinterpolation

Finde zu $f_j = f(x_j)$, $j = 0, \dots, n$ eine Funktion $S \in \mathcal{P}_{4,\tau}$, so dass

$$\begin{aligned} S(x_j) &= f_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \\ S''(a) &= S''(b) = 0. \end{aligned}$$

Kubische Splines

Die Interpolationsaufgabe ist **eindeutig lösbar** und die Lösung hat eine interessante **Extremaleigenschaft**:

Lemma 9.3

Es sei g eine beliebige Funktion aus $C^2([a, b])$ mit $g(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \dots, n$ und $g''(a) = g''(b) = 0$. Für die eindeutige Lösung S der Interpolationsaufgabe gilt

$$\int_a^b S''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx.$$

Kubische Splines

Die Interpolationsaufgabe ist **eindeutig lösbar** und die Lösung hat eine interessante **Extremaleigenschaft**:

Lemma 9.3

Es sei g eine beliebige Funktion aus $C^2([a, b])$ mit $g(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \dots, n$ und $g''(a) = g''(b) = 0$. Für die eindeutige Lösung S der Interpolationsaufgabe gilt

$$\int_a^b S''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx.$$

Bedeutung: die Lösung S **minimiert** unter allen Funktionen $g \in C^2([a, b])$, die dieselben Interpolationsforderungen erfüllen, **näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung**.

Bestimmung der Lösung

Es seien x_j , $j = 0, \dots, n$, äquidistante Stützstellen: $x_{j+1} - x_j = h$.

$$m_j := S''(x_j), \quad I_j := [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Wegen $S|_{I_j} \in \Pi_3$ ergibt sich, dass $S''|_{I_j}$ linear ist und dass

$$S''|_{I_j}(x) = \frac{(x_{j+1} - x)m_j + (x - x_j)m_{j+1}}{h}$$

Nach zweifacher Integration, mit $S(x_j) = f_j$ und $S(x_{j+1}) = f_{j+1}$:

$$\begin{aligned} S|_{I_j}(x) &= \frac{(x_{j+1} - x)^3 m_j + (x - x_j)^3 m_{j+1}}{6h} \\ &+ \frac{(x_{j+1} - x)f_j + (x - x_j)f_{j+1}}{h} \\ &- \frac{1}{6}h[(x_{j+1} - x)m_j + (x - x_j)m_{j+1}] \end{aligned}$$

Bestimmung der Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} S|_{I_j} &\in \Pi_3, \quad S \in C([a, b]), \\ S''|_{I_j}(x_{j+1}) &= m_{j+1} = S''|_{I_{j+1}}(x_{j+1}). \end{aligned}$$

Bestimmung der Lösung

Es gilt

$$S|_{I_j} \in \Pi_3, \quad S \in C([a, b]),$$

$$S''|_{I_j}(x_{j+1}) = m_{j+1} = S''|_{I_{j+1}}(x_{j+1}).$$

Die noch unbekanntenen Größen m_j werden so gewählt, dass

$$S'|_{I_{j-1}}(x_j) = S'|_{I_j}(x_j), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

gilt. Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$m_{j-1} + 4m_j + m_{j+1} = \frac{6}{h^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Bestimmung der Lösung

Wegen

$$m_0 = S''(a) = 0, \quad m_n = S''(b) = 0$$

Ergibt sich insgesamt das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Lösung

Wegen

$$m_0 = S''(a) = 0, \quad m_n = S''(b) = 0$$

Ergibt sich insgesamt das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung: allgemeinere Methode zur Berechnung einer Splineinterpolation unter Verwendung der **B-Spline-Basis**: Abschnitt 9.5.

Kondition

S : kubischer Spline zu Daten $f_j, j = 0, \dots, n$.

\tilde{S} : kubischer Spline zu Daten $\tilde{f}_j, j = 0, \dots, n$.

Kondition

Es gilt

$$\|\tilde{S} - S\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |\tilde{S}(x) - S(x)| \leq 3\frac{1}{2} \|\tilde{f} - f\|_\infty$$

$$\frac{\|\tilde{S} - S\|_\infty}{\|S\|_\infty} \leq 3\frac{1}{2} \frac{\|\tilde{f} - f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Kondition

S : kubischer Spline zu Daten $f_j, j = 0, \dots, n$.

\tilde{S} : kubischer Spline zu Daten $\tilde{f}_j, j = 0, \dots, n$.

Kondition

Es gilt

$$\|\tilde{S} - S\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |\tilde{S}(x) - S(x)| \leq 3\frac{1}{2} \|\tilde{f} - f\|_\infty$$

$$\frac{\|\tilde{S} - S\|_\infty}{\|S\|_\infty} \leq 3\frac{1}{2} \frac{\|\tilde{f} - f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Die Kondition der kubischen Interpolation, im Falle äquidistanter Stützstellen, ist gut. Insbesondere hängt die Konditionszahl nicht von der Anzahl der Stützstellen ab.

Beispiel 9.5

Daten

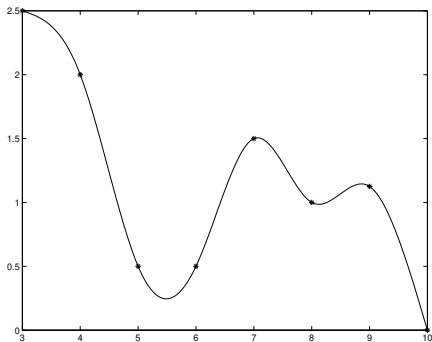
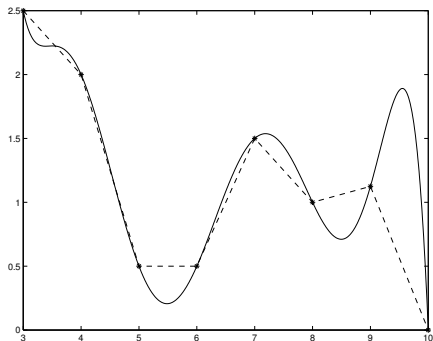
i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	2.5	2.0	0.5	0.5	1.5	1.0	1.125	0.0

Das zugehörige System:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 1 \\ -1.5 \\ 0.625 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

Beispiel 9.5

Das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad 7, die stückweise lineare Interpolation und die kubische Splineinterpolation:



Ordnung von Splines

Vorbemerkung:

Bei der Behandlung von Splines ist es bequemer, statt mit dem **Grad von Polynomen**, mit der **Ordnung**

$$k := \text{Grad} + 1$$

zu arbeiten.

Spline-Raum

Für eine Knotenmenge $\tau = \{\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}\}$ mit

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_\ell < \tau_{\ell+1} = b \text{ und } k \geq 1$$

ist der **Spline-Raum** der Splines der Ordnung k :

Für $k = 1$:

$$\mathcal{P}_{1,\tau} = \{f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f|_{[\tau_i, \tau_{i+1})} \in \Pi_0, 0 \leq i \leq \ell\}.$$

Für $k \geq 2$:

$$\mathcal{P}_{k,\tau} = \{f \in C^{k-2}([a, b]) \mid f|_{[\tau_i, \tau_{i+1})} \in \Pi_{k-1}, 0 \leq i \leq \ell\}.$$

Für $k = 4$ ergibt sich gerade der Raum der **kubischen Splines**.

Eigenschaften

Lemma 9.7

$$\dim \mathcal{P}_{k,\tau} = k + \ell$$

Eigenschaften

Lemma 9.7

$$\dim \mathcal{P}_{k,\tau} = k + \ell$$

Es sei

$$h = \max_{j=0,\dots,\ell} (\tau_{j+1} - \tau_j) \quad \text{und} \quad \|g\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |g(x)| \quad (g \in C([a,b])).$$

Satz 9.8

Für jedes $k \geq 2$ existiert eine positive Konstante $c < \infty$, so dass für jedes $m \leq k$ und jede Funktion $f \in C^m([a,b])$ gilt

$$\min_{S_k \in \mathcal{P}_{k,\tau}} \|f - S_k\|_\infty \leq ch^m \|f^{(m)}\|_\infty$$

Basis des Splineraumes

Da jedes Polynom insbesondere ein stückweises Polynom ist, das zudem sogar unendlich oft differenzierbar ist, gilt

$$\Pi_{k-1} \subset \mathcal{P}_{k,\tau}.$$

Außerdem sieht man leicht, dass

$$(\tau_i - x)_+^{k-1} \in \mathcal{P}_{k,\tau}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

wobei, für $m \geq 0$,

$$y_+^m = \begin{cases} y^m & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } y \leq 0, \end{cases}$$

die sogenannten **abgebrochenen Potenzen** sind.

Basis des Splineraumes

Die $k + \ell$ Funktionen

$$x^i, \quad i = 0, \dots, k - 1,$$

und

$$(\tau_i - x)_+^{k-1}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

sind linear unabhängig.

Basis des Splineraumes

Die $k + \ell$ Funktionen

$$x^i, \quad i = 0, \dots, k - 1,$$

und

$$(\tau_i - x)_+^{k-1}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

sind linear unabhängig.

Diese Funktionen bilden also **eine Basis für $\mathcal{P}_{k,\tau}$** .

Diese Basis ist für praktische Zwecke ungeeignet.

Eine viel bessere Basis für $\mathcal{P}_{k,\tau}$ bilden die sogenannten **B-Splines**.

B-Splines

B-Splines sind **stückweise Polynome bezüglich einer Knotenmenge**. Es sei

$$t_1 < t_2 \dots < t_n$$

eine solche Knotenmenge, die mit der im Splineraum verwendeten Knotenmenge $\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}$ vorläufig nichts zu tun hat.

B-Splines

B-Splines sind **stückweise Polynome bezüglich einer Knotenmenge**. Es sei

$$t_1 < t_2 \dots < t_n$$

eine solche Knotenmenge, die mit der im Splineraum verwendeten Knotenmenge $\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}$ vorläufig nichts zu tun hat.

Der Fall $k = 1$. Die einfachsten stückweisen Polynomen sind die **charakteristischen Funktionen**

$$N_{j,1}(x) := \chi_{[t_j, t_{j+1})}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [t_j, t_{j+1}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad j = 0, \dots, n-1.$$

B-Splines

B-Splines sind **stückweise Polynome bezüglich einer Knotenmenge**. Es sei

$$t_1 < t_2 \dots < t_n$$

eine solche Knotenmenge, die mit der im Splineraum verwendeten Knotenmenge $\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}$ vorläufig nichts zu tun hat.

Der Fall $k = 1$. Die einfachsten stückweisen Polynomen sind die **charakteristischen Funktionen**

$$N_{j,1}(x) := \chi_{[t_j, t_{j+1})}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [t_j, t_{j+1}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Der **Träger** (engl. „support“) der Funktion $N_{j,1}$:

$$\text{supp } N_{j,1} := \{x \in \mathbb{R} \mid N_{j,1}(x) \neq 0\}$$

Die Funktionen $N_{j,1}$, $0 \leq j \leq n-1$, haben einen **lokalen Träger**.

B-Splines

Jede stückweise konstante Funktion bezüglich der Knotenmenge $t_1 < \dots < t_n$ lässt sich als Linearkombination der $N_{j,1}$ schreiben

$$S(x) = \sum_{j=0}^{\ell} c_j N_{j,1}(x).$$

Die Funktion S lässt sich mit dem Koeffizientenvektor $c = (c_j)_{j=0}^{\ell}$ identifizieren.

Es gilt

$$\|c\|_{\infty} = \left\| \sum_{j=0}^{\ell} c_j N_{j,1} \right\|_{\infty} = \|S\|_{\infty}$$

Die Basis ist in diesem Sinne **gut konditioniert**.

B-Splines

Der Fall $k = 2$. Stückweise lineare Funktionen kann man einfach rekursiv aus den charakteristischen Funktionen konstruieren:

$$N_{j,2}(x) := \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} N_{j,1}(x) + \frac{t_{j+2} - x}{t_{j+2} - t_{j+1}} N_{j+1,1}(x),$$

$$j = 1, \dots, n - 2.$$

B-Splines

Der Fall $k = 2$. Stückweise lineare Funktionen kann man einfach rekursiv aus den charakteristischen Funktionen konstruieren:

$$N_{j,2}(x) := \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} N_{j,1}(x) + \frac{t_{j+2} - x}{t_{j+2} - t_{j+1}} N_{j+1,1}(x),$$

$$j = 1, \dots, n - 2.$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

- 1) von Null verschiedene Werte nur auf dem Intervall $[t_j, t_{j+2}]$;
- 2) auf jedem der beiden Intervalle $[t_j, t_{j+1}]$, $[t_{j+1}, t_{j+2}]$ ist $N_{j,2}$ linear;
- 3) $N_{j,2}$ ist stetig.

Definition B-Splines

Definition 9.11

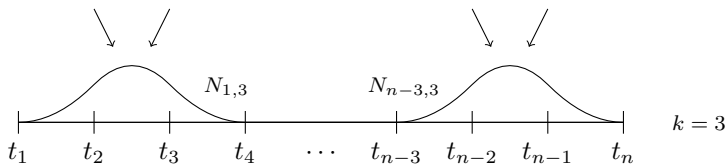
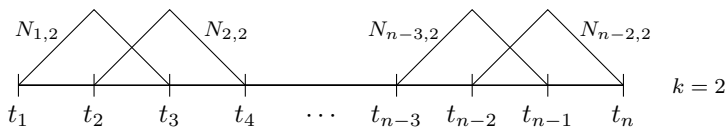
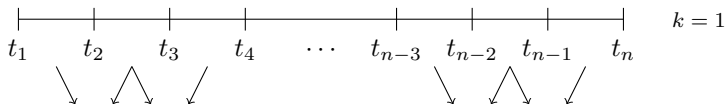
Sei $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ eine Menge von paarweise verschiedenen Knoten. Dann werden die B-Splines $N_{j,k}$ der Ordnung k ($1 \leq k < n$) rekursiv definiert durch

$$N_{j,1}(x) := \chi_{[t_j, t_{j+1})}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$
$$N_{j,k}(x) := \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} N_{j,k-1}(x) + \frac{t_{j+k} - x}{t_{j+k} - t_{j+1}} N_{j+1,k-1}(x),$$

für $k = 2, \dots, n-1$, und $j = 1, \dots, n-k$.

Beachte dass die Anzahl $n - k$ von k abhängt.

B-Splines $N_{j,k}$, $k = 1, 2, 3$.



Eigenschaften von B-Splines

Lemma 9.12

Für die B-Splines $N_{j,k}$ gilt:

- (i) $\text{supp } N_{j,k} \subset [t_j, t_{j+k}]$,
- (ii) $N_{j,k}(x) > 0$ für alle $x \in (t_j, t_{j+k})$,
- (iii) $(N_{j,k})|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Pi_{k-1}$,
- (iv) $\sum_{j=1}^{n-k} N_{j,k}(x) = 1$ für alle $x \in [t_k, t_{n-k+1}]$.

Explizite Darstellung für die B-Splines

Satz 9.13

Die B-Splines $N_{j,k}$ haben folgende Darstellung:

$$N_{j,k}(x) = (t_{j+k} - t_j)[t_j, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-1},$$

für $1 \leq k < n$ und $1 \leq j \leq n - k$.

Insbesondere impliziert dies $N_{j,k} \in C^{k-2}([t_1, t_n])$ für $k \geq 2$.

Explizite Darstellung für die B-Splines

Satz 9.13

Die B-Splines $N_{j,k}$ haben folgende Darstellung:

$$N_{j,k}(x) = (t_{j+k} - t_j)[t_j, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-1},$$

für $1 \leq k < n$ und $1 \leq j \leq n - k$.

Insbesondere impliziert dies $N_{j,k} \in C^{k-2}([t_1, t_n])$ für $k \geq 2$.

Die dividierte Differenz wirkt auf das Argument (\cdot) . [Zum Beispiel:](#)

$$\begin{aligned} [t_j, t_{j+1}](\cdot - x)_+^m &= \frac{[t_{j+1}](\cdot - x)_+^m - [t_j](\cdot - x)_+^m}{t_{j+1} - t_j} \\ &= \frac{(t_{j+1} - x)_+^m - (t_j - x)_+^m}{t_{j+1} - t_j}. \end{aligned}$$

B-Splines und Lagrange-Interpolationspolynom

Für $1 \leq j \leq n - k$:

Die dividierte Differenz

$$[t_j, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)_+^{k-1}$$

ist als **führender Koeffizient des Lagrange-Interpolationspolynoms** der Funktion

$$f_{k-1}(s) := (s - x)_+^{k-1}$$

an den Stützstellen t_j, \dots, t_{j+k} definiert.

Beispiel 9.14

$k = 2$. Es sei, für festes x , $g_x(t) := (t - x)_+$.

Dann ist $[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}](\cdot - x)_+ = [t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]g_x$ der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(g_x | t_j, t_{j+1}, t_{j+2})$.

Beispiel 9.14

$k = 2$. Es sei, für festes x , $g_x(t) := (t - x)_+$.

Dann ist $[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}](\cdot - x)_+ = [t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]g_x$ der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(g_x | t_j, t_{j+1}, t_{j+2})$.

Wir unterscheiden die Fälle

$x \leq t_j$, $x \geq t_{j+2}$, $x \in [t_j, t_{j+1}]$, $x \in [t_{j+1}, t_{j+2}]$.

1. $x \leq t_j$. Dann ist $P(g_x | t_j, t_{j+1}, t_{j+2})(t) = t - x$ und somit ist der führende Koeffizient Null: $[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]g_x = 0$.

2. $x \geq t_{j+2}$. Dann ist $P(g_x | t_j, t_{j+1}, t_{j+2})(t) = 0$, also der führende Koeffizient ist Null: $[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]g_x = 0$.

Beispiel 9.14

3. $x \in [t_j, t_{j+1}]$. Dann gilt folgende Tabelle dividierter Differenzen:

t_m	$[t_m]g_x$	$[t_m, t_{m+1}]g_x$	$[t_m, t_{m+1}, t_{m+2}]g_x$
t_j	0		
t_{j+1}	$t_{j+1} - x$	$> \frac{t_{j+1} - x}{t_{j+1} - t_j}$	$> \frac{x - t_j}{(t_{j+2} - t_j)(t_{j+1} - t_j)}$
t_{j+2}	$t_{j+2} - x$	> 1	

also: $[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]g_x = \frac{x - t_j}{(t_{j+2} - t_j)(t_{j+1} - t_j)}$.

4. $x \in [t_{j+1}, t_{j+2}]$. Wie bei 3 erhält man

$$[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]g_x = \frac{t_{j+2} - x}{(t_{j+2} - t_j)(t_{j+2} - t_{j+1})}$$

Beispiel 9.14

Insgesamt:

$$(t_{j+2} - t_j)[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]g_x = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq t_j \\ (x - t_j)/(t_{j+1} - t_j) & \text{für } x \in [t_j, t_{j+1}] \\ (t_{j+2} - x)/(t_{j+2} - t_{j+1}) & \text{für } x \in [t_{j+1}, t_{j+2}] \\ 0 & \text{für } x \geq t_{j+2} \end{cases}$$
$$= N_{j,2}(x).$$

Ableitung von B-Splines

Folgerung 9.15

Für $k \geq 3$ gilt für die Ableitung von $N_{j,k}$

$$N'_{j,k}(x) = (k - 1) \left\{ \frac{N_{j,k-1}(x)}{t_{j+k-1} - t_j} - \frac{N_{j+1,k-1}(x)}{t_{j+k} - t_{j+1}} \right\},$$

Beachte

Die Ableitungen von B-Splines sind gewichtete Differenzen von B-Splines niedrigerer Ordnung.

B-Splines und Splineraum

Sei $\mathcal{P}_{k,\tau}$ der Splineraum mit Knotenmenge $\tau = \{\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}\}$:

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_\ell < \tau_{\ell+1} = b.$$

B-Splines und Splineraum

Sei $\mathcal{P}_{k,\tau}$ der Splineraum mit Knotenmenge $\tau = \{\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}\}$:

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_\ell < \tau_{\ell+1} = b.$$

Wir definieren eine **erweiterte Knotenmenge** $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, mit $n := 2k + \ell$,

$$\begin{aligned} t_1 < \dots < t_k &= \tau_0, \\ t_{k+j} &= \tau_j \text{ für } j = 1, \dots, \ell, \\ \tau_{\ell+1} &= t_{k+1+\ell} < \dots < t_{2k+\ell}. \end{aligned}$$

Wie in Definition 9.11 werden **zu dieser erweiterten Knotenmenge T die B-Splines $N_{j,k}$, $1 \leq j \leq n - k = k + \ell$, definiert.**

Satz 9.16

Die Funktionswerte $N_{j,k}(x)$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Im Splineraum $\mathcal{P}_{k,\tau}$ sind nur die Werte $N_{j,k}(x)$ mit $x \in [a, b]$ von Interesse.

Wir definieren

$$S_{k,T} = \text{Span}\{ N_{j,k}|_{[a,b]} \mid 1 \leq j \leq k + \ell \}$$

Satz 9.16

Die Funktionswerte $N_{j,k}(x)$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Im Splineraum $\mathcal{P}_{k,\tau}$ sind nur die Werte $N_{j,k}(x)$ mit $x \in [a, b]$ von Interesse.

Wir definieren

$$S_{k,T} = \text{Span}\{ N_{j,k}|_{[a,b]} \mid 1 \leq j \leq k + \ell \}$$

Folgendes Hauptresultat zeigt, dass die (auf $[a, b]$ restringierten) B-Splines $N_{j,k}$ eine Basis für den Splineraum $\mathcal{P}_{k,\tau}$ bilden.

Satz 9.16

Es gilt

$$\mathcal{P}_{k,\tau} = S_{k,T}.$$

Bemerkung 9.17

Wahl der Hilfsknoten

Die Definition von $S_{k,T}$ ist unabhängig von der Wahl der Hilfsknoten

$$t_1, \dots, t_{k-1} < a$$

und

$$t_{k+\ell+2}, \dots, t_{2k+\ell} > b.$$

Man lässt sie deshalb oft auf den jeweiligen Intervallenden a bzw. b **zusammenfallen**.

Beispiel 9.18

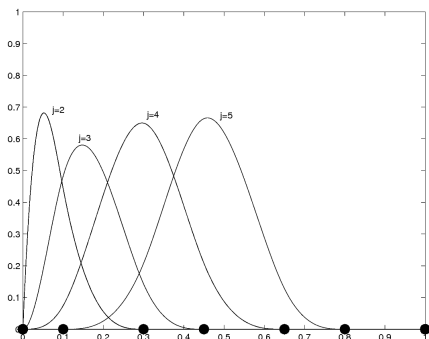
Wir betrachten $[a, b] = [0, 1]$, $k = 4$, $\ell = 5$,

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0,$$

$$t_5 = 0.1, t_6 = 0.3, t_7 = 0.45, t_8 = 0.65, t_9 = 0.8,$$

$$t_{10} = t_{11} = t_{12} = t_{13} = 1.$$

Für $j = 2, 3, 4, 5$ werden die kubische B-Splines $N_{j,4}$ unten abgebildet.



Kondition der B-Spline-Basis

Einer der Hauptgründe für die Wichtigkeit der B-Splines:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle Knotenmengen $T = \{t_j\}_{j=1}^{k+l}$ und alle $\{c_j\}_{j=1}^{k+l}$ gilt:

$$c \max_{j=1, \dots, k+l} |c_j| \leq \max_{x \in [a, b]} \left| \sum_{j=1}^{k+l} c_j N_{j,k}(x) \right| \leq \max_{j=1, \dots, k+l} |c_j|.$$

Gute Kondition:

Kleine Änderungen in den Koeffizienten bewirken nur kleine Änderungen in der entsprechenden Splinefunktion und umgekehrt und zwar **unabhängig von der Lage der Knoten**.

Splines in der B-Spline Basis

Jeder Spline $S \in \mathcal{P}_{k,\tau}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$S(x) = \sum_{j=1}^{k+\ell} c_j N_{j,k}(x), \quad x \in [a, b].$$

Splines in der B-Spline Basis

Jeder Spline $S \in \mathcal{P}_{k,\tau}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$S(x) = \sum_{j=1}^{k+\ell} c_j N_{j,k}(x), \quad x \in [a, b].$$

Seien $c_1, \dots, c_{k+\ell}$ bekannt.

Hilfsgrößen für eine effiziente Auswertung von S :

$$c_j^{[p]}(x) = \begin{cases} c_j, & p = 0 \\ \frac{x-t_j}{t_{j+k-p}-t_j} c_j^{[p-1]}(x) + \frac{t_{j+k-p}-x}{t_{j+k-p}-t_j} c_{j-1}^{[p-1]}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auswertung von S Algorithmus 9.19 (Auswertung von S)

Gegeben: $x \in [a, b]$ und $c_1, \dots, c_{k+\ell}$ aus der obigen Darstellung.

- ▶ Bestimme m mit $x \in [t_m, t_{m+1})$. (Es ist $k \leq m \leq k + \ell$.)

- ▶ Setze

$$c_j^{[0]}(x) = c_j, \quad j = m - k + 1, \dots, m.$$

- ▶ Für $p = 1, \dots, k - 1$ berechne

$$c_j^{[p]}(x), \quad j = m - k + 1 + p, \dots, m.$$



$$S(x) = c_m^{[k-1]}(x).$$

Beispiel 9.20

Sei

$$S(x) = \sum_{j=1}^7 c_j N_{j,4}(x)$$

mit $c_1 = -3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 2$, $c_4 = 3$, $c_5 = -1$, $c_6 = 4$, $c_7 = 1$.Auswertung an der Stelle $x = 0.6$. Wegen $0.6 \in [t_7, t_8]$ ist $m = 7$.Mit Algorithmus 9.19: $S(0.6) = c_7^{[3]} = 2.2857$.

c_j		$c_j^{[1]}$		$c_j^{[2]}$		$c_j^{[3]}$
$c_4 = 3$						
	>	$c_5^{[1]} = -0.6364$				
$c_5 = -1$			>	$c_6^{[2]} = 1.6234$		
	>	$c_6^{[1]} = 2.0000$			>	$c_7^{[3]} = 2.2857$
$c_6 = 4$			>	$c_7^{[2]} = 2.5065$		
$c_7 = 1$	>	$c_7^{[1]} = 3.1818$				

Ableitungen von Splines

In analoger Weise kann man **Ableitungen von Splinefunktionen** behandeln.

Es ergibt sich folgende Darstellung der p -ten Ableitung:

$$S^{(p)}(x) = \sum_{j=1+p}^{k+\ell} c_j^{(p)} N_{j,k-p}(x), \quad x \in [a, b],$$

als **Linearkombination von B-Splines der Ordnung $k - p$** .

Ableitungen von Splines

In analoger Weise kann man **Ableitungen von Splinefunktionen** behandeln.

Es ergibt sich folgende Darstellung der p -ten Ableitung:

$$S^{(p)}(x) = \sum_{j=1+p}^{k+\ell} c_j^{(p)} N_{j,k-p}(x), \quad x \in [a, b],$$

als **Linearkombination von B-Splines der Ordnung $k - p$** .

Die neuen Koeffizienten $c_j^{(p)}$ sind p -te Differenzen der ursprünglichen Koeffizienten:

$$c_j^{(p)} = \begin{cases} c_j, & p = 0, \\ (k - p) \frac{c_j^{(p-1)} - c_{j-1}^{(p-1)}}{t_{j+k-p} - t_j}, & 0 < p \leq k - 2. \end{cases}$$

Beispiel 9.22

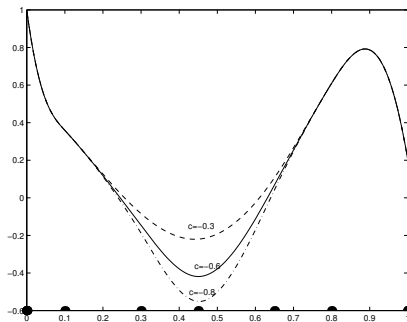
Die Variation der Koeffizienten c_j verändert in vorhersehbarer Weise $S(x)$.

Es seien $\tau := \{0, 0.1, 0.3, 0.45, 0.65, 0.8, 1\}$ und

$S(x) = \sum_{j=1}^9 c_j N_{j,4}(x) \in \mathcal{P}_{4,\tau}$, mit

$$(c_j)_{1 \leq j \leq 9} = (1, 0.5, 0.3, -0.1, c, 0, 0.7, 1.0, 0.2)$$

Graph der Funktion $S(x)$ für $c_4 = c = -0.3, -0.6, -0.8$:



Splineinterpolation

Satz 9.24 (von Schoenberg und Whitney)

Sei $T = \{t_j\}_{j=1}^n$ eine erweiterte Knotenmenge.

Seien $x_1, \dots, x_{k+\ell} \in [a, b]$ Stützstellen und $f_1, \dots, f_{k+\ell}$ die zugehörigen Daten.

Das Problem der Bestimmung eines $S \in \mathcal{P}_{k,\tau}$, so dass

$$S(x_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, k + \ell$$

gilt, hat **genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung**, wenn

$$x_j \in (t_j, t_{j+k}), \quad j = 1, \dots, k + \ell,$$

d.h., wenn in den Träger jedes B-Splines mindestens eine Stützstelle fällt. Man kann sogar zeigen, dass die Aussage für Hermite-Interpolation gültig bleibt.

Kubische Spline-Interpolation

Wir gehen nun auf den wichtigen Spezialfall der **kubischen Spline-Interpolation** nochmals ein.

Dies betrifft den Fall, dass $k = 4$ ist und Stützstellen und Knoten übereinstimmen:

$$x_j := t_{j+3} = \tau_{j-1} \text{ für } j = 1, \dots, \ell + 2.$$

Dies liefert allerdings nur $\ell + 2$ Bedingungen.

Kubische Spline-Interpolation

Wir gehen nun auf den wichtigen Spezialfall der **kubischen Spline-Interpolation** nochmals ein.

Dies betrifft den Fall, dass $k = 4$ ist und Stützstellen und Knoten übereinstimmen:

$$x_j := t_{j+3} = \tau_{j-1} \text{ für } j = 1, \dots, \ell + 2.$$

Dies liefert allerdings nur $\ell + 2$ Bedingungen.

(a) **Vollständige kubische Spline-Interpolation:**

$$S(t_j) = f_j, \quad j = 4, \dots, \ell + 5, \quad S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b).$$

(b) **Natürliche kubische Spline-Interpolation:**

$$S(t_j) = f_j, \quad j = 4, \dots, \ell + 5, \quad S''(a) = S''(b) = 0.$$

Extremaleigenschaft

Lemma 9.27

Es sei $g \in C^2([a, b])$ und $S \in \mathcal{P}_{4,\tau}$, so dass

$$g(t_j) = S(t_j) \quad \text{für } j = 4, \dots, \ell + 5,$$

$$S''(b)(g'(b) - S'(b)) = S''(a)(g'(a) - S'(a)).$$

Dann gilt

$$\int_a^b S''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx$$

Vollständige kubische Spline-Interpolation

Satz 9.28

Zu den Daten f_j , $j = 4, \dots, \ell + 5$, \hat{f}_a und \hat{f}_b , existiert ein eindeutiger Spline $I_4 f \in \mathcal{P}_{4,\tau}$, so dass

$$\begin{aligned}(I_4 f)(t_j) &= f_j, & j &= 4, \dots, \ell + 5, \\ (I_4 f)'(a) &= \hat{f}_a, & (I_4 f)'(b) &= \hat{f}_b.\end{aligned}$$

Ferner erfüllt $I_4 f$ die Extremaleigenschaft

$$\int_a^b (I_4 f)''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx$$

für alle Funktionen $g \in C^2([a, b])$, die die gleichen Interpolations- und Randbedingungen wie $I_4 f$ erfüllen.

Natürliche kubische Spline-Interpolation

Satz 9.29

Zu den Daten f_j , $j = 4, \dots, \ell + 5$, existiert ein eindeutiger Spline $\hat{I}_4 f \in \mathcal{P}_{4,\tau}$, so dass

$$\begin{aligned}(\hat{I}_4 f)(t_j) &= f_j, \quad j = 4, \dots, \ell + 5, \\(\hat{I}_4 f)''(a) &= (\hat{I}_4 f)''(b) = 0.\end{aligned}$$

Ferner erfüllt $\hat{I}_4 f$ die Extremaleigenschaft

$$\int_a^b (\hat{I}_4 f)''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx$$

für alle Funktionen $g \in C^2([a, b])$, die die gleichen Interpolations- und Randbedingungen wie $\hat{I}_4 f$ erfüllen.

Approximationsgüte

Sei

$$h = \max_{j=0, \dots, \ell} (\tau_{j+1} - \tau_j)$$

und $f \in C^4([a, b])$.

Es gilt

$$\|f - I_4 f\|_\infty \leq \frac{h^4}{16} \|f^{(4)}\|_\infty,$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf $[a, b]$ ist.

Der Vergleich mit Satz 9.8 zeigt, dass die kubische Interpolation (unabhängig von der Lage der Knoten!) die bestmögliche Approximationsordnung realisiert.

Berechnung der vollständigen kubischen Spline-Interpolation

Sei $I_4 f$ die vollständige Spline-Interpolation einer Funktion $f \in C^1([a, b])$.

Wegen Satz 9.16 hat $I_4 f$ die Form

$$(I_4 f)(x) = \sum_{j=1}^{\ell+4} c_j N_{j,4}(x).$$

Die Lösung des Interpolationsproblems verlangt nun, die **Koeffizienten c_j** über die Interpolationsbedingungen aus Satz 9.28 zu bestimmen.

Berechnung der vollständigen kubischen Spline-Interpolation

Es gilt

$$c_1 = f_4,$$

$$c_{\ell+4} = f_{\ell+5},$$

$$c_2 = \frac{\hat{f}_a - f_4 N'_{1,4}(a)}{N'_{2,4}(a)},$$

$$c_{\ell+3} = \frac{\hat{f}_b - f_{\ell+5} N'_{\ell+4,4}(b)}{N'_{\ell+3,4}(b)}$$

Es sind lediglich noch die Koeffizienten $(c_3, \dots, c_{\ell+2})^T =: \mathbf{c}$ zu bestimmen.

Berechnung der vollständigen kubischen Spline-Interpolation

Für $(c_3, \dots, c_{\ell+2})^T = \mathbf{c}$ ergibt sich das Gleichungssystem $A_T \mathbf{c} = \mathbf{f}$, wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\tilde{f}_5, f_6, f_7, \dots, f_{\ell+3}, \tilde{f}_{\ell+4})^T, \quad \text{mit} \\ \tilde{f}_5 &= f_5 - c_2 N_{2,4}(t_5), \\ \tilde{f}_{\ell+4} &= f_{\ell+4} - c_{\ell+3} N_{\ell+3,4}(t_{\ell+4}), \end{aligned}$$

und

$$A_T = \begin{pmatrix} N_{3,4}(t_5) & N_{4,4}(t_5) & & & & \\ N_{3,4}(t_6) & N_{4,4}(t_6) & N_{5,4}(t_6) & & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \emptyset & & N_{\ell,4}(t_{\ell+3}) & N_{\ell+1,4}(t_{\ell+3}) & N_{\ell+2,4}(t_{\ell+3}) & \\ & & & N_{\ell+1,4}(t_{\ell+4}) & N_{\ell+2,4}(t_{\ell+4}) & \end{pmatrix}.$$

Beispiel 9.31

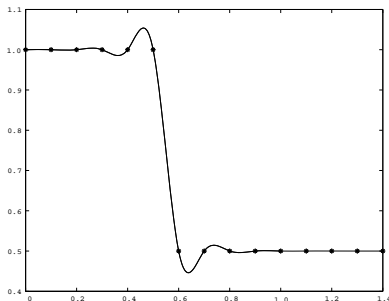
Seien

$$\tau_j = j \cdot 0.1, \quad j = 0, \dots, 14,$$

$$f_j = 1, \quad j = 0, \dots, 5,$$

$$f_j = 0.5, \quad j = 6, \dots, 14.$$

Die entsprechende natürliche kubische Spline-Interpolation ist unten dargestellt. Man stellt fest, dass wegen des Sprunges in den Daten Oszillationen auftreten.



Datenfit über eine Ausgleichsformulierung

Gegeben seien (Mess)daten (x_j, f_j) , $j = 1, \dots, m$.

Man wähle einen Splineraum $\mathcal{P}_{k,\tau}$, $\tau = \{\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}\}$, und eine entsprechende erweiterte Knotenfolge $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, $n := 2k + \ell$.

Ausgleichsformulierung

Finde $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{k+\ell})^T$, so dass

$$S(x) = \sum_{j=1}^{k+\ell} c_j N_{j,k}(x) \in \mathcal{P}_{k,\tau}$$

folgende Bedingung erfüllt:

$$\sum_{j=1}^m (S(x_j) - f_j)^2 = \min_{\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{k+\ell}} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\ell=1}^{k+\ell} \tilde{c}_\ell N_{\ell,k}(x_j) - f_j \right)^2$$

Im Allg. ist $m \gg k + \ell$, und die x_j müssen nicht mit t_j übereinstimmen.

Datenfit über eine Ausgleichsformulierung

Diese Aufgabe ist ein **lineares Ausgleichsproblem** der Form

$$\|A_T \mathbf{c} - \mathbf{f}\|_2 = \min_{\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{k+\ell}} \|A_T \tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{f}\|_2$$

wobei hier

$$A_T = (N_{j,k}(x_i))_{i=1, j=1}^{m, k+\ell} \in \mathbb{R}^{m \times (k+\ell)},$$

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Datenfit über eine Ausgleichsformulierung

Diese Aufgabe ist ein **lineares Ausgleichsproblem** der Form

$$\|A_T \mathbf{c} - \mathbf{f}\|_2 = \min_{\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{k+\ell}} \|A_T \tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{f}\|_2$$

wobei hier

$$A_T = (N_{j,k}(x_i))_{i=1, j=1}^{m, k+\ell} \in \mathbb{R}^{m \times (k+\ell)},$$

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$

- ▶ In jeden Träger der B-Splines $N_{j,k}$ sollte **mindestens** ein x_ℓ liegen.
- ▶ Die Matrix A_T hat dann **vollen Rang**.

Smoothing Splines

Beim obigen Ausgleichsansatz können stark fehlerbehaftete Datensätze und starke *Datenausreißer* ein *Überfitten* mit entsprechenden Oszillationen bewirken.

Das Konzept des „*Smoothing Splines*“ schafft hier Abhilfe.

Idee: Ein *Strafterm* soll starke Ausschläge unterdrücken.

Für ein $\theta \geq 0$ sucht man dasjenige $S \in \mathcal{P}_{k,\tau}$, das

$$\sum_{j=1}^m (S(x_j) - f_j)^2 + \theta^2 \|S''\|_2^2 = \min_{\tilde{S} \in \mathcal{P}_{k,\tau}} \sum_{j=1}^m (\tilde{S}(x_j) - f_j)^2 + \theta^2 \|\tilde{S}''\|_2^2$$

erfüllt.

Smoothing Splines

Eine leichte Modifikation des Terms $\|S''\|_2^2$ erlaubt eine viel effizientere Implementierung.

Für

$$S(x) = \sum_{j=1}^{k+\ell} c_j N_{j,k}(x)$$

gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} c^2 \sum_{j=3}^{k+\ell} \left(c_j^{(2)} \|N_{j,k-2}\|_2 \right)^2 &\leq \|S''\|_2^2 \\ &\leq C^2 \sum_{j=3}^{k+\ell} \left(c_j^{(2)} \|N_{j,k-2}\|_2 \right)^2 . \end{aligned}$$

Smoothing Splines

Man erhält also im Wesentlichen denselben Strafterm, wenn $\|S''\|_2^2$ durch

$$\sum_{j=3}^{k+\ell} \hat{c}_j^2, \text{ mit } \hat{c}_j := c_j^{(2)} \|N_{j,k-2}\|_2,$$

ersetzt wird. Dies führt zu folgendem Minimierungsproblem:

Finde $S(x) = \sum_{j=1}^{k+\ell} c_j N_{j,k}(x)$ so dass,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{k+\ell} c_i N_{i,k}(x_j) - f_j \right)^2 + \theta^2 \sum_{j=3}^{k+\ell} \hat{c}_j^2 \\ &= \min_{\tilde{c} \in \mathbb{R}^{k+\ell}} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{k+\ell} \tilde{c}_i N_{i,k}(x_j) - f_j \right)^2 + \theta^2 \sum_{j=3}^{k+\ell} \hat{c}_j^2 \end{aligned}$$

Smoothing Splines

Umformung dieses Problems in den Koeffizientenvektor

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{k+\ell})^T.$$

Es gilt

$$c_j^{(2)} = \frac{(k-1)(k-2)}{t_{j+k-2} - t_j} \left[\frac{1}{t_{j+k-2} - t_{j-1}} c_{j-2} - \left(\frac{1}{t_{j+k-1} - t_j} + \frac{1}{t_{j+k-2} - t_{j-1}} \right) c_{j-1} + \frac{1}{t_{j+k-1} - t_j} c_j \right],$$

für $j = 3, \dots, k + \ell$.

Smoothing Splines

Mit $\hat{\mathbf{c}} := (\hat{c}_3, \dots, \hat{c}_{k+l})^T$ ergibt sich $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{B}_T \mathbf{c}$, wobei

$$\mathbf{B}_T := \begin{pmatrix} b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & & & & \\ & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & & & \emptyset \\ \emptyset & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_{k+l,k+l-2} & b_{k+l,k+l-1} & b_{k+l,k+l} & \end{pmatrix},$$

mit

$$d_j := \frac{(k-1)(k-2) \|N_{j,k-2}\|_2}{t_{j+k-2} - t_j}, \quad b_{j,j-2} := \frac{d_j}{t_{j+k-2} - t_{j-1}},$$

$$b_{j,j} := \frac{d_j}{t_{j+k-1} - t_j}, \quad b_{j,j-1} := -(b_{j,j-2} + b_{j,j}).$$

Smoothing Splines

Das Minimierungsproblem erhält dann die Form

$$\|A_T \mathbf{c} - \mathbf{f}\|_2^2 + \theta^2 \|B_T \mathbf{c}\|_2^2 = \min_{\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{k+\ell}} \|A_T \tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{f}\|_2^2 + \theta^2 \|B_T \tilde{\mathbf{c}}\|_2^2,$$

was wiederum gleichbedeutend mit

$$\left\| \begin{pmatrix} A_T \\ \theta B_T \end{pmatrix} \mathbf{c} - \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\|_2 \rightarrow \min$$

und somit ein **Standard-Ausgleichsproblem** ist.

Beispiel 9.33

Messungen (x_j, f_j) , $j = 1, \dots, 20$ (* in der Abbildung).

Approximation mit **kubischen Splines an äquidistanten Knoten**

$\tau_j = j \cdot 0.1$, $j = 0, \dots, 10$.

Lösung $S(x) = \sum_{j=1}^{13} c_j N_{j,4}(x)$ für Parameterwerte
 $\theta = 0, 10^{-3}, 10^{-2}$.

