Dynamische Deklination Platonischer und Archimedischer Körper

Karl-Heinz Brakhage, Claus Pütz

RWTH Aachen

http://www.igpm.rwth-aachen.de/brakhage

http://www.igpm.rwth-aachen.de/puetz

brakhage{puetz}@igpm.rwth-aachen.de

40. Österreichische Fortbildungstagung für Geometrie

Strobl, 7. bis 9. November 2019

Über die Vortragenden

Karl-Heinz Brakhage

Studium TU Hannover:

Mathematik, Physik,
Informatik (Diplom und HLA)

Promotion RWTH Aachen

Lehre / Forschung:

Numerische Analysis
CAGD
Wissenschaftliches Rechnen
Ingenieurs-Kooperationen
Lehr- und Lernsoftware

Claus Pütz

Studium und Promotion RWTH Aachen

Architektur, Pädagogik

Lehre / Forschung:

Darstellende Geometrie
CAD - Systeme
Lehr- und Lernsoftware

Übersicht

- **Einführung und Ziel**
- **Platonische Körper**
- **Archimedische Körper**
- **Mathematischer Hintergrund**
- **Zusammenfassung und zukünftige Erweiterungen**
- **Diskussion**

Einführung und Ziel

Die Behandlung Platonischer und Archimedischer Körper ist in der Literatur und im Netz weit verbreitet. Nicht alle Darstellungen sind fehlerfrei.

Auch ist uns keine komplette, dynamische Behandlung aller (Ecken-)Abstumpfungs-, (Kanten-)Schrägungs- und Drehoperationen bekannt.

Ziel ist es daher, ein für die Lehre geeignetes Komplettpaket zu erstellen. Diese soll sowohl vorher festgelegte Abläufe automatisch durchführen können, als auch frei bedienbar sein. Letzteres ist insbesondere für das Nachvollziehen und Selbststudien nützlich.

Übersicht

- **Einführung und Ziel**
- **Platonische Körper**
  - **Vorführung mit dem Programm *archimedes***
- **Archimedische Körper**
  - **Vorführung mit dem Programm *archimedes***
- **Mathematischer Hintergrund**
- **Zusammenfassung und zukünftige Erweiterungen**
- **Diskussion**

Ikosaeder in Strobl

Das Programm und die Bedienung werden in der separaten Broschüre **archimedes-Anleitung.pdf** erklärt.

Übersicht

- **Einführung und Ziel**
- **Platonische Körper**
- **Archimedische Körper**
- **Mathematischer Hintergrund**
  - ***The Making off***
- **Zusammenfassung und zukünftige Erweiterungen**
- **Diskussion**

Mathematischer Hintergrund

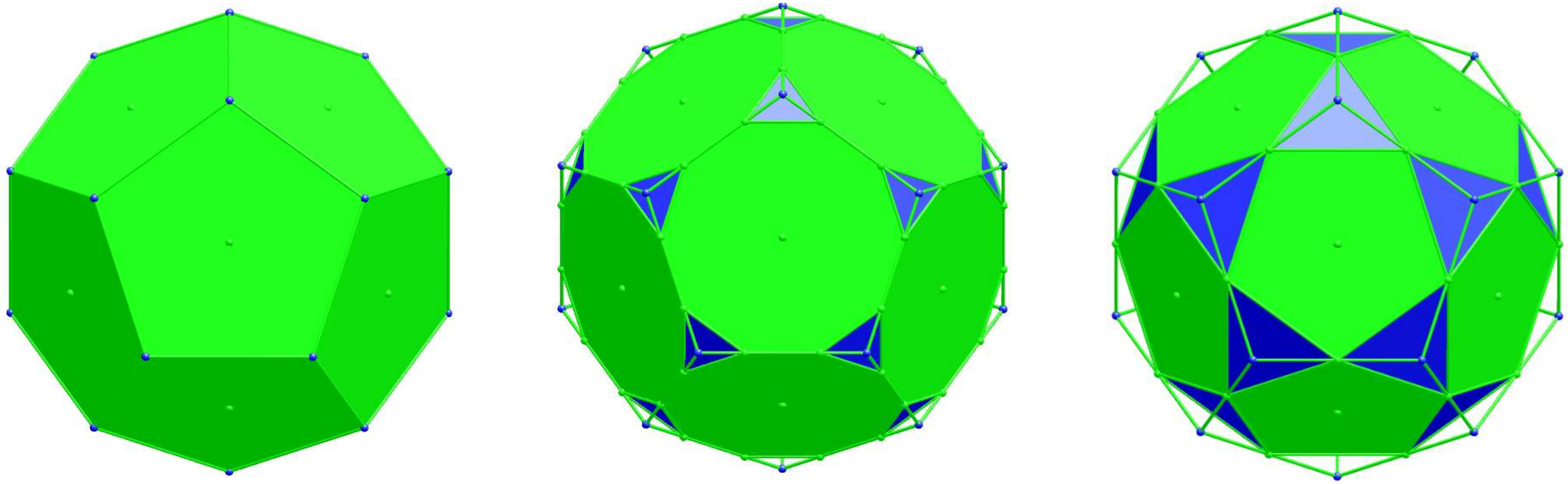
Hier soll kurz erläutert werden, wie die in der Programmvorführung gezeigten Archimedischen Körper exakt berechnet werden. Wir gehen davon aus, dass die Platonischen Körper mit exakten Koordinaten (Zahlen und Quadratwurzeln) vorliegen. Sie sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Drei reine Abstumpfungskörper (bis zum dualen Körper) können mittels ebener Berechnungen / Konstruktionen am Drei-, Vier- und Fünfeck (plus Übertragung auf den Platonischen Körper) berechnet / konstruiert werden.

Bei den übrigen Körpern verwenden wir eine Modifizierung eines ***Subdivision Schemes***.

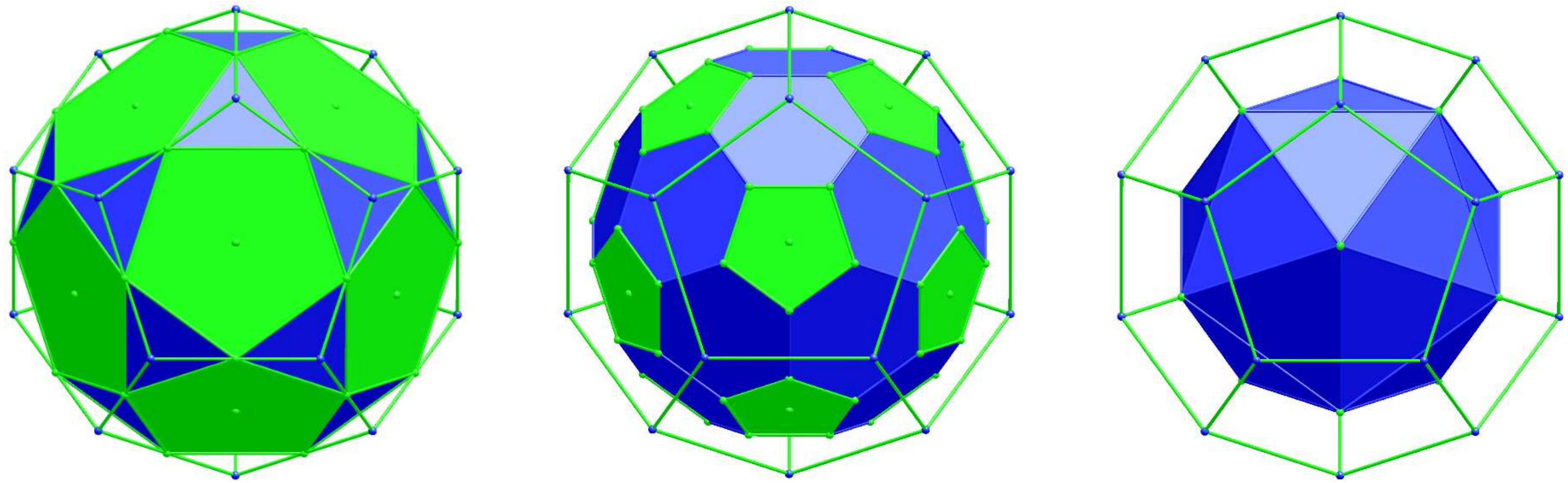
Die meisten Skizzen sind für das Dodekaeder → Fünfeck gemacht. Das Prinzip ist beim Viereck / Dreieck identisch.

Abstumpfung des Dodekaeders



Oben sehen wir vom Dodekaeder die ersten beiden Abstumpfungen. Das Teilungsverhältnis auf den Kanten für das regelmäßige 10-Eck kann eben bestimmt werden. Die Symmetrie des Dodekaeders sorgt dafür, dass entstehenden Dreiecke ***um die*** Eckpunkte (wie auch im rechten Bild) regelmäßig sind. Auch beim Viereck → 8-Eck Übergang ergeben sich konstruierbare Größen. (Dreieck trivial)

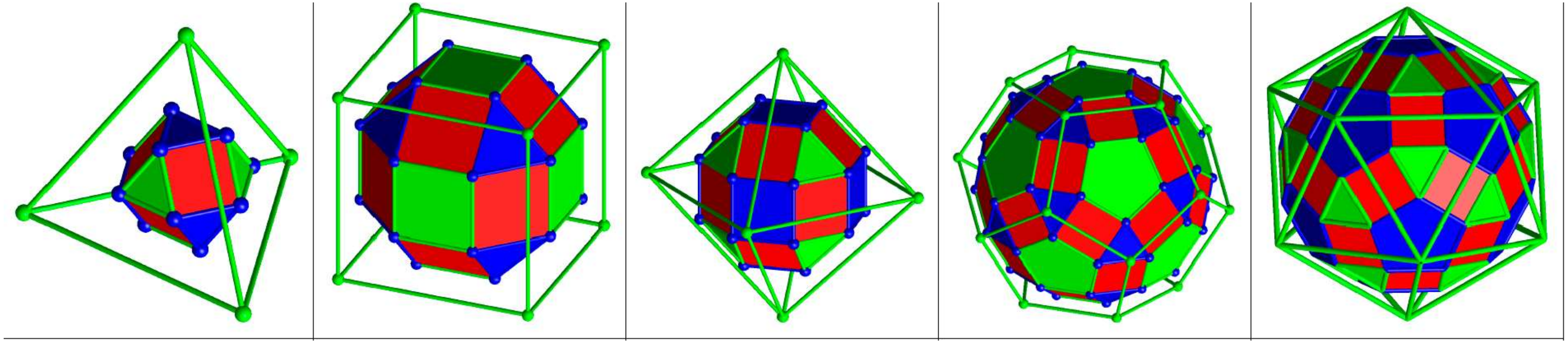
Abstumpfung des Dodekaeders



Wenn wir den Dodekaeder weiter abstumpfen, dann ist der ***Fußball*** nicht eben bestimmbar. Das Gleiche gilt für die Anderen Platonischen Körper bei dem Übergang in diese Stufe.

Wir kommen weiter unten darauf zurück. Auch dieser Fall lässt sich mit einer Modifikation des jetzt folgenden Doo-Sabin Verfahrens behandeln.

Doo-Sabin Subdivision



Oben sehen wir ein die komplette Reihe der modifizierten Regel. Man beachte, dass sich für jeden Körper ein unterschiedlicher Wert für t ergibt.

Im Folgenden wollen wir noch kurz die Bestimmung der t-Werte erläutern. Dazu wählen wir von jedem Platonischen Körper von zwei benachbarte Facetten die Zentren und die Endpunkte der gemeinsamen Kante.

Subdivision Schemes

1978 wurden in der Zeitschrift CAD zwei verschiedene ***Subdivision Schemes*** veröffentlicht.

Catmull-Clark: Verallgemeinerung der kubischen B-Splines

Ed Catmull gründete 1986 zusammen mit Steve Jobs Pixar und war bis Mitte 2019 noch für Disney tätig.

Doo-Sabin: Verallgemeinerung der qudratischen B-Splines (inspiriert durch ***Corner-Cutting*** – Chaikin 1974)

Letzteres lässt sich für (ebene) regelmäßige Vielecke vereinfacht wie folgt beschreiben:

(Ein Punkt hat die Valenz v, wenn er auf v Kanten liegt.)

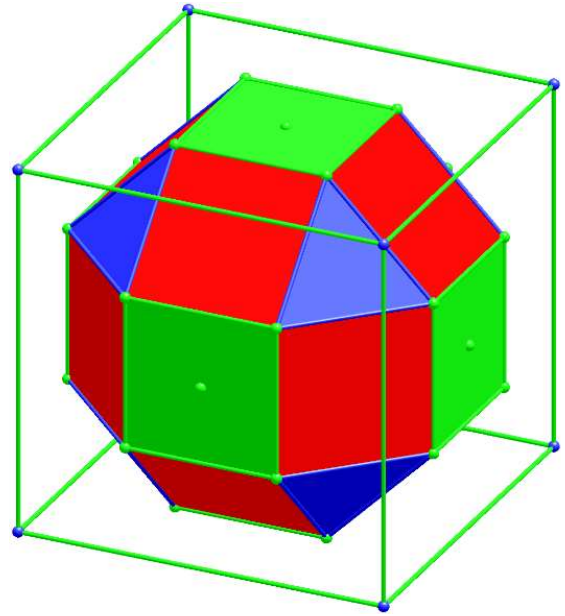
Doo-Sabin Subdivision

Neue Punkte: Bestimme die (Ecken-) Schwerpunkte C_i der Vielecke und erzeuge als neue Punkte Q_{ij} in jedem Vieleck die ***Mittelpunkte*** von C_i und seinen Eckpunkten P_j.

Drei Sorten neuer Facetten:

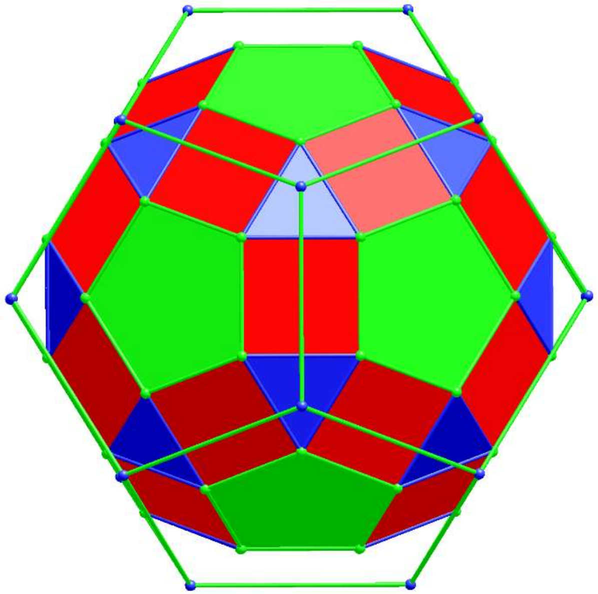
1. Die neuen Punkte in jedem n-Eck bilden ein neues n-Eck
2. *Über* die Kanten werden Vierecke gebildet.
3. Um die Ausgangspunkte mit Valenz v_i werden v_i-Ecke gebildet.

Rechts sehen wir ein Beispiel. Die Regel $Q_{ij} = ½\, C_i + ½\, P_j$ führt aber noch nicht auf Archimedische Körper. Das Gewicht ½ muss noch so verändern werden, dass die **roten Vierecke** zu Quadraten werden



$$\rightarrow \quad Q_{ij} = t\, C_i + (1\text{-}t)\, P_j$$

Modifiziertes Doo-Sabin Subdivision

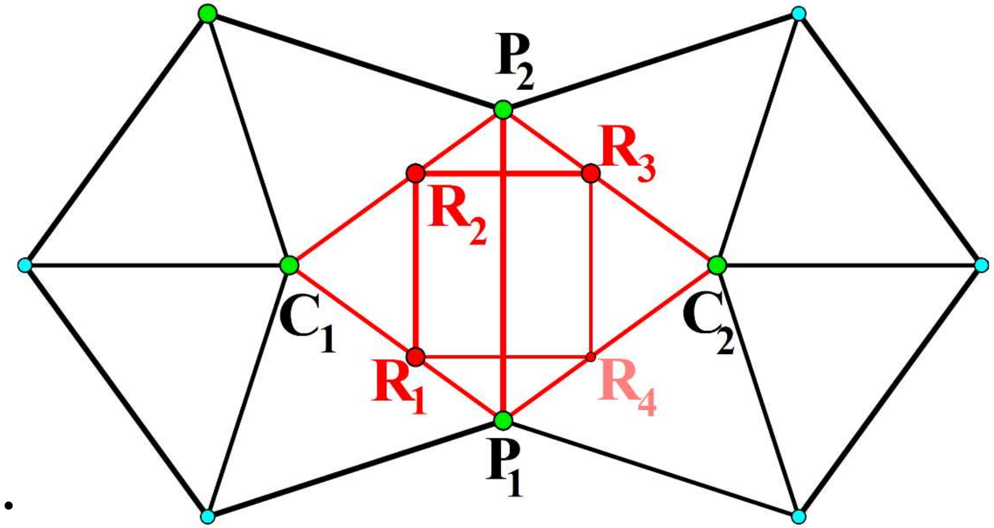


Von dem Dodekaeder links wählen wir die Zentren C_1 und C_2 sowie die Punkte P_1 und P_2 aus. In der Skizze unten sind die kompletten Fünfecke zu sehen. Für die Berechnung brauchen wir sie nicht. Die Punkte R_1 bis R_4 werden mit obiger Regel berechnet.

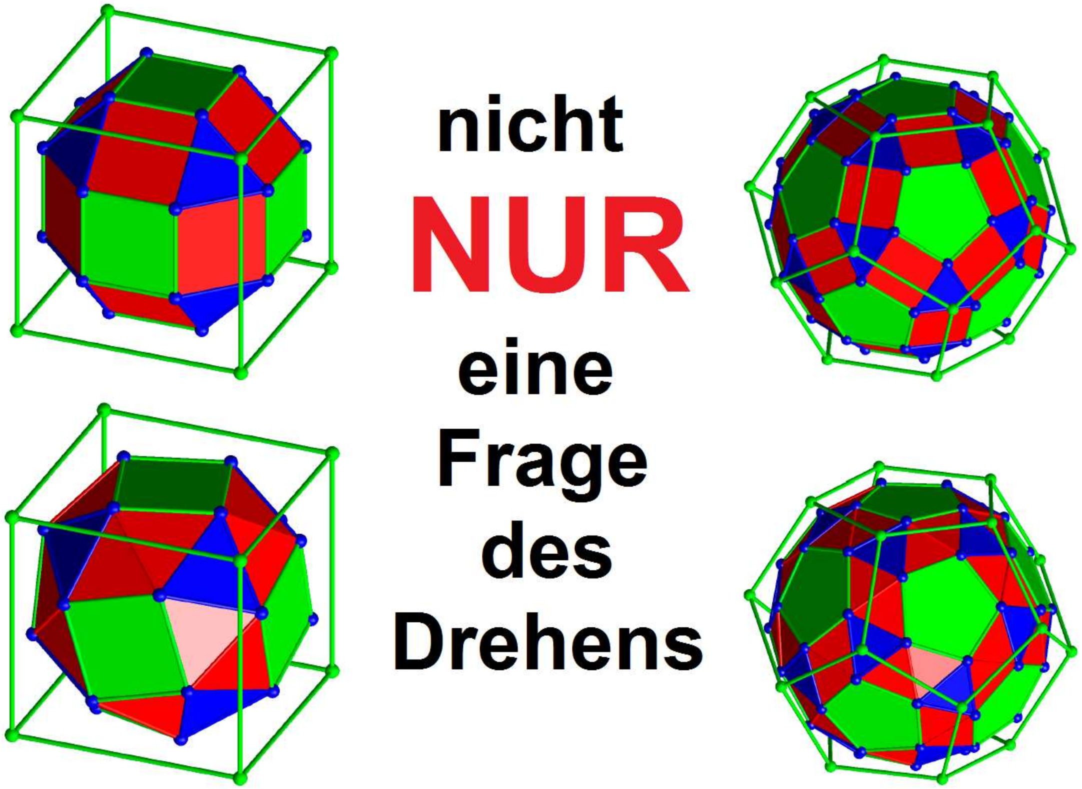
Aus Symmetriegründen ist dann $(R_1,R_2)\|(R_2,R_4)$ u.s.w.

Somit können wir t aus $\mathrm{dist}(R_1, R_2) = \mathrm{dist}(R_2, R_3)$ berechnen.

Dreiecke und Vierecke analog.

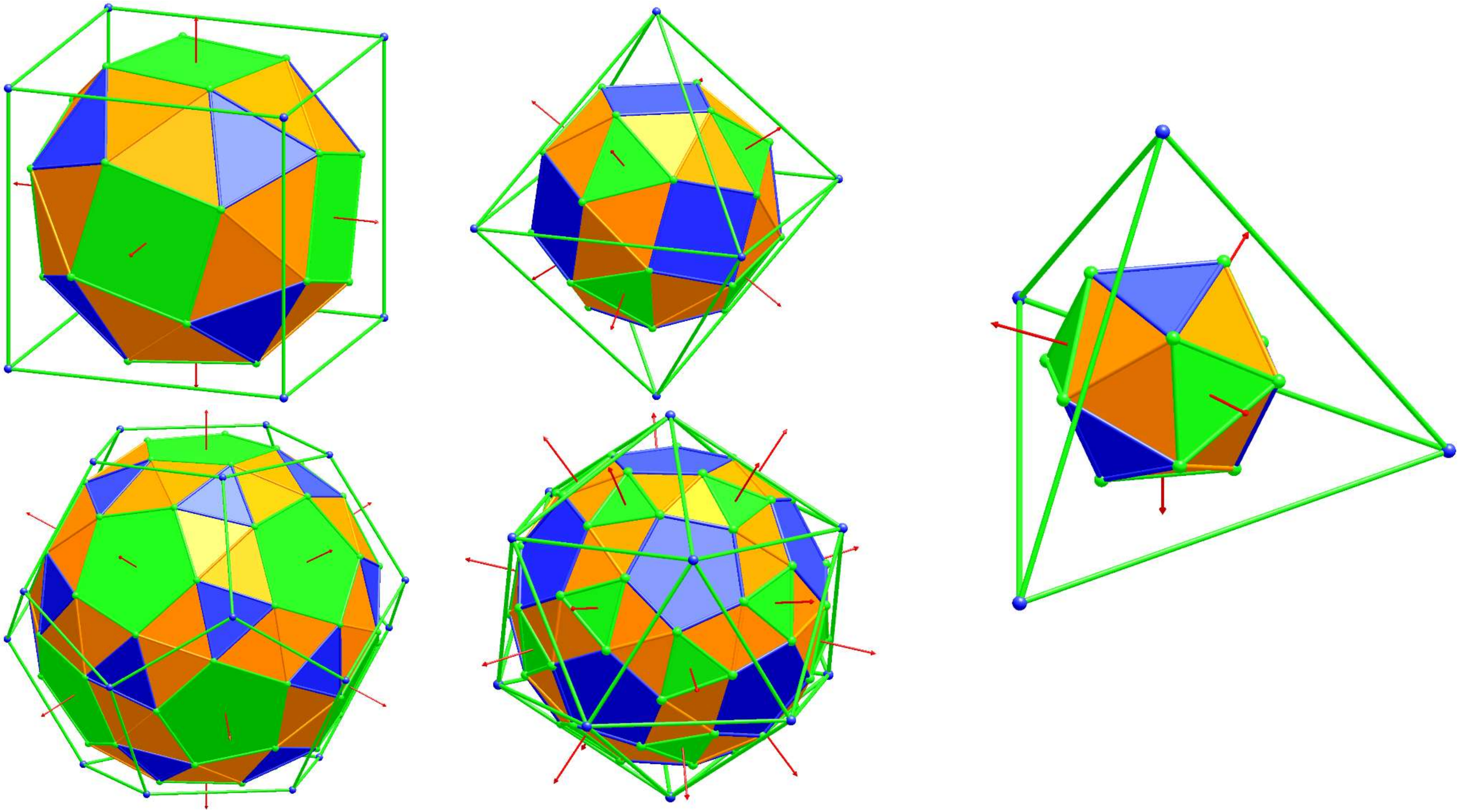


Corpi Simi



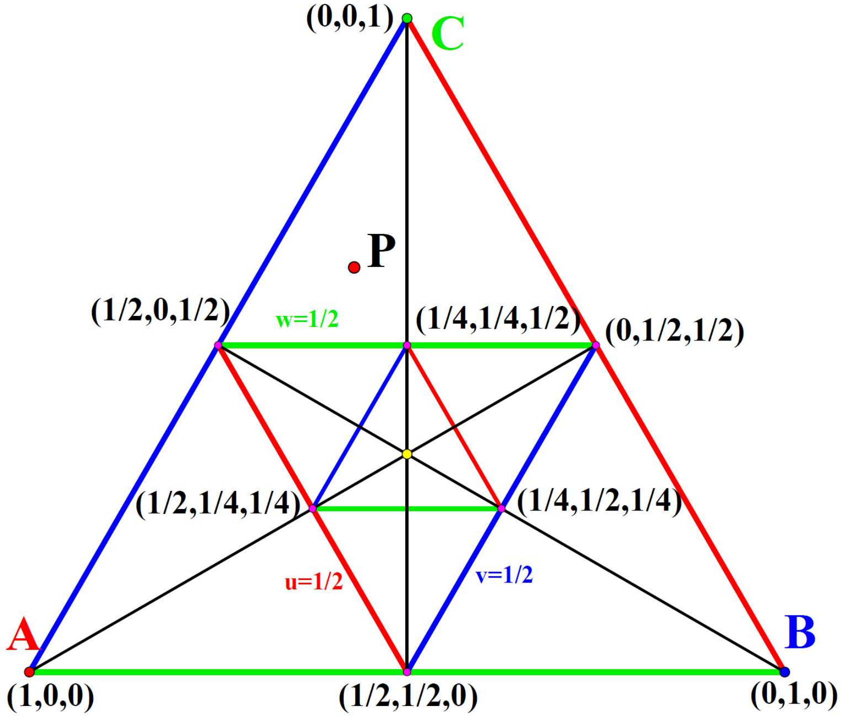
Die wie eben beschrieben erzeugten n-Ecks-Punkte sollen jetzt zusätzlich so verdreht werden, dass aus den roten Rechtecken je zwei gleichseitige Dreiecke werden. Anders als vielfach in der Literatur beschrieben geht das aber nicht, ohne die obigen Parameter t zu verändern.

Corpi Simi



Oben sehen wir neben dem Cubus Simus und dem Deode-kader Simum auch die anderen Snub-Körper. Für ihre Berechnung verwenden wir baryzentrische Koordinaten.

Baryzentrische Koordinaten

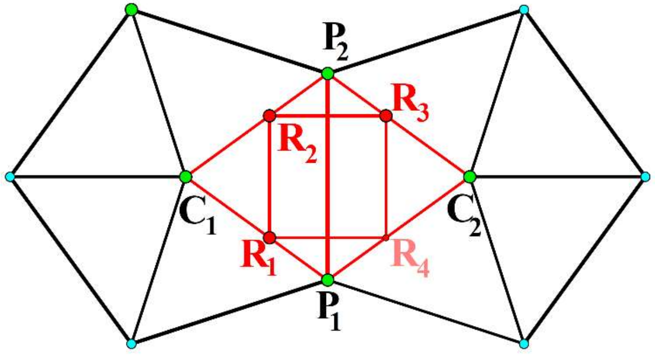


Jeder Punkt in der durch A, B und C aufgespannten Ebene lässt sich eindeutig durch

$$\mathbf{P = u\,A + v\,B + w\,C}$$

mit $\mathbf{w = 1 - u - v}$ darstellen.
Für u, v, w in [0,1] liegt P im Dreieck (A, B, C).
Mit Hilfe dieser Darstellung in baryzentrischen Koordinaten können wir in regelmäßigen Vielflachen die benötigten Drehungen relativ einfach und einheitlich beschreiben.

Baryzentrische Koordinaten - Drehungen



Wenn wir die R_i mit dem selben Winkel um die Zentren C_i drehen so haben sie in den gleichschenkligen Dreiecken um C_i die selben baryzentrischen Koordinaten.

$$\mathbf{S_1 = u\, P_1 + v\, P_2 + w\, C_1}$$
$$\mathbf{S_2 = u\, P_2 + v\, P_3 + w\, C_1}$$
$$\mathbf{S_3 = u\, P_2 + v\, P_1 + w\, C_2}$$

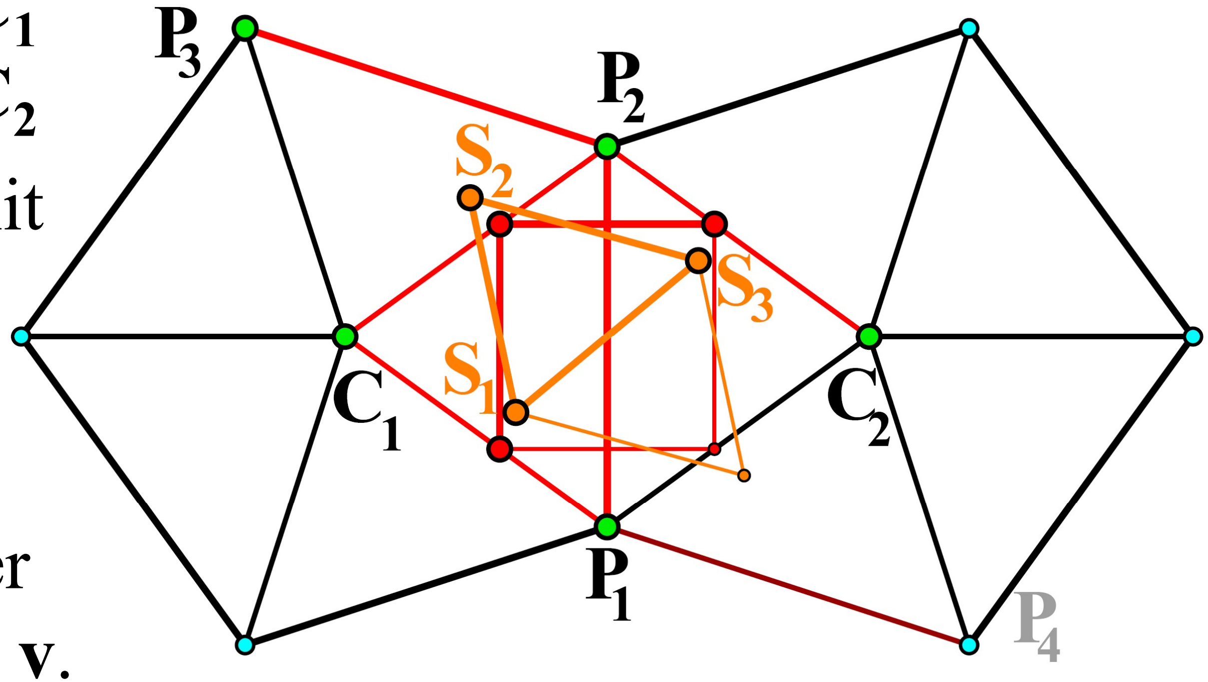
Daraus ergeben sich mit

$\mathbf{w = 1 - u - v}$ und

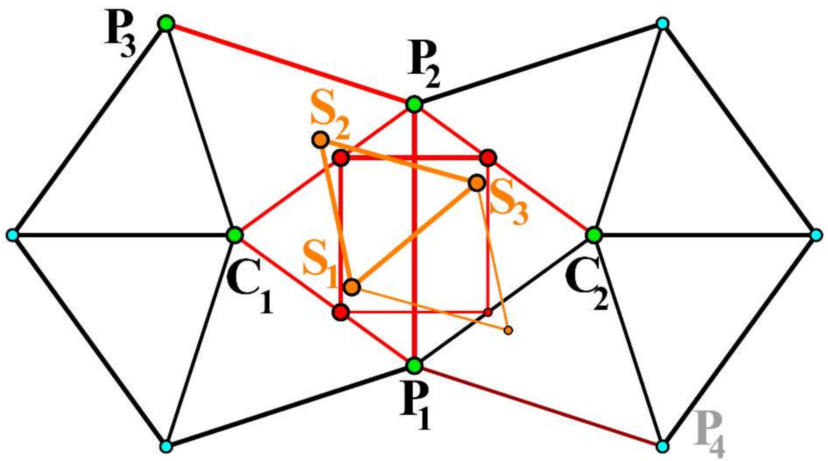
$\mathbf{(S_2 - S_1)^2 = (S_2 - S_3)^2}$

$\mathbf{(S_2 - S_1)^2 = (S_3 - S_1)^2}$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte in **u** und **v**.



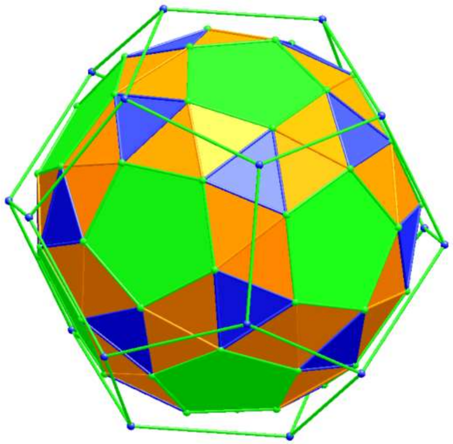
Baryzentrische Koordinaten - Drehungen

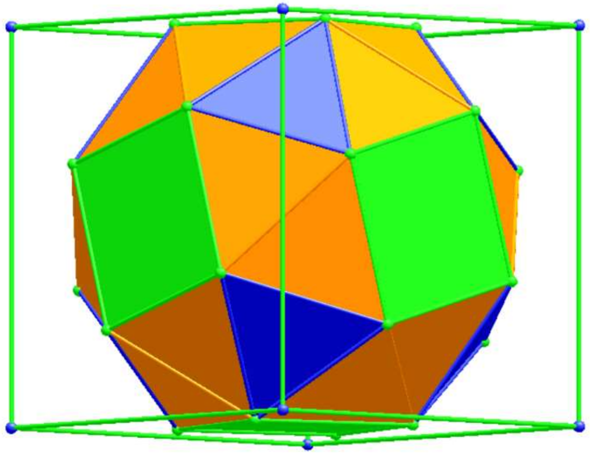


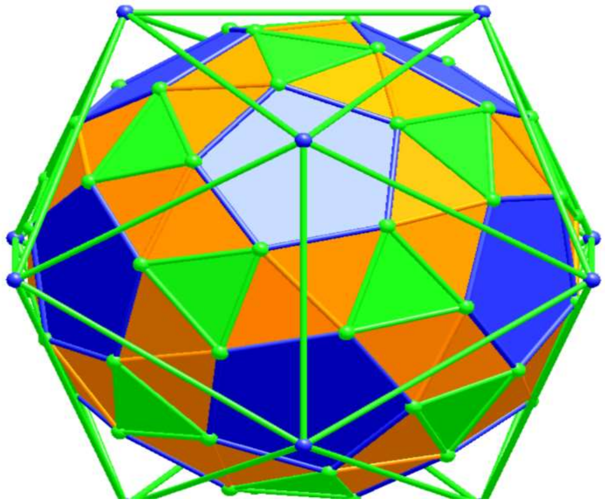
In der Skizze sind beide Dreiecke zu sehen. Zur Berechnung brauchen wir nur eins und somit vom Platonischen Körper als weiteren Punkt nur P_3.

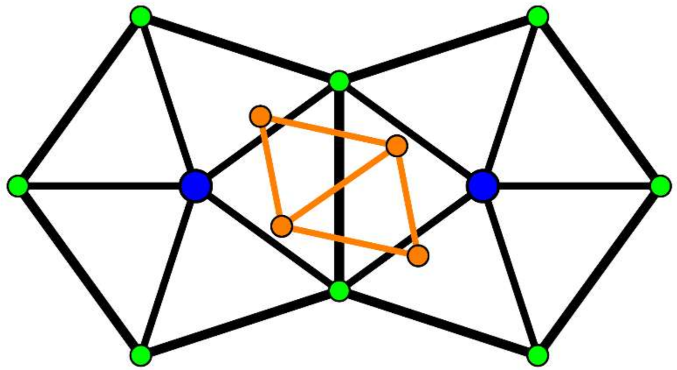
I.A. führen die Gleichungen zweier Kegelschnitte als Schnitt auf eine quartische Gleichung. In allen 5 Fällen ist hier eine parasitäre Lösung 0 und übrig bleibt eine irreduzible kubische Gleichung.
Algebraisch lässt sich die Lösung als Ausdruck mit kubischen Wurzeln exakt berechnen. Mit Zirkel und Lineal ist aber, im Gegensatz zu allen anderen Archimedischen Körpern, keine exakte Konstruktion möglich.

Übertragung auf Vierecke und Dreiecke





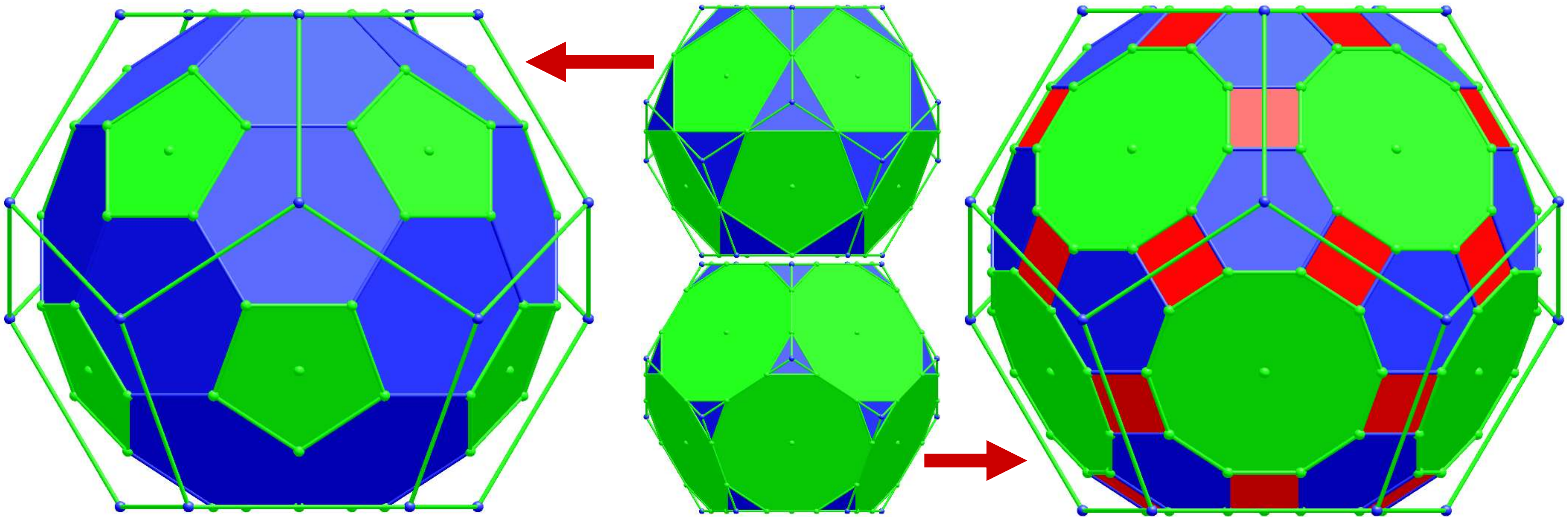




Man sieht, dass das am Fünfeck gezeigte Prinzip einfach auf Vierecke und Dreiecke übertragen werden kann.

Für Dreiecke ist nur das Ikosaeder gezeigt. Es müssen aber für das Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder die Berechnungen separat durchgeführt werden.

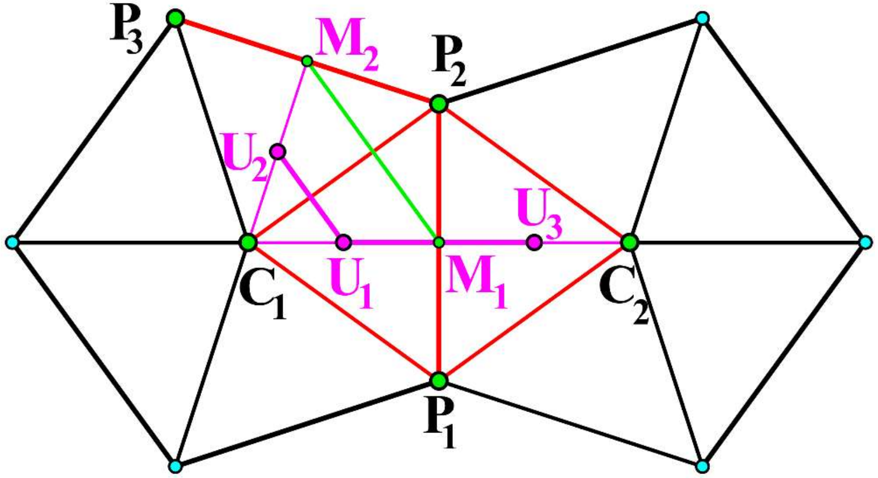
Die verbleibenden Fälle

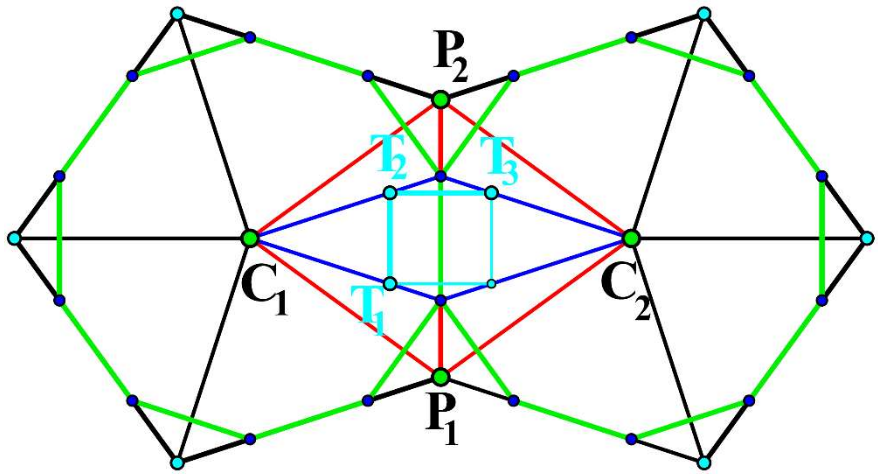


Die verbleibenden Fälle werden ebenfalls mit modifizierten Regeln und einer ***Vorstufe*** (siehe Mitte oben) behandelt. Die in der Vorstufe erzeugten Facetten erzeugen keine neuen Punkte. Um Ecken der Valenz v bilden wir 2v-Ecke. Die Ausgangs n-Ecke erzeugen n- bzw. 2n-Ecke (hier 5 bzw. 10).

Links gibt es keine den Kanten zugeordneten Vierecke.

Die verbleibenden Fälle





$U_1 = t\, C_1 + (1\text{-}t)\, M_1$

$U_2 = t\, C_1 + (1\text{-}t)\, M_2$

$U_3 = t\, C_2 + (1\text{-}t)\, M_1$

Dann t aus

$\mathrm{dist}(U_1, U_2) = \mathrm{dist}\,(U_2, U_3)$

Hier hängen die M_1 und M_2 entsprechenden Zwischenpunkte noch von der Anzahl der Ecken ab (3, 4 oder 5)

Dann wieder t aus

$\mathrm{dist}(T_1, T_2) = \mathrm{dist}(T_2, T_3)$

Übersicht

- Einführung und Ziel
- Platonische Körper
- Archimedische Körper
- Mathematischer Hintergrund
- Zusammenfassung und zukünftige Erweiterungen
- Diskussion

Zusammenfassung

- Wir haben ein Programm vorgestellt, dass alle Übergänge von Platonischen zu Archimedischen Körpern dynamisch illustrieren kann.
- Ecken, Kanten und Facetten (auch der Abstumpfungs- und Abschrägungskörper) sowie Normalen, Facettenzentren, In- und Umkugeln können beliebig an- und ausgeschaltet werden und werden dynamisch mitgeführt.
- Die Abläufe können über eine Steuerungsdatei erstellt und für eine Vorführung automatisch abgerufen werden.
- Für die Corpi Simi ist eine neue einheitliche Berechnung vorgestellt worden.

Programm

Wir werden das Programm zur Verfügung stellen.

- Auch die Files zur Steuerung der hier vorgeführten Demos.

Näheres demnächst auf der ADG – Seite und unter

dg-ac.de/Archimedes

Erweiterungen

- Erweiterung der Funktionalität
- Erweiterung der Visualisierung: Transparente Facetten, Schatten, usw.
- Auch andere, z.B. Catalanische Körper

Wir sind auch offen für Anregungen

Übersicht

- **Einführung und Ziel**
- **Platonische Körper**
- **Archimedische Körper**
- **Mathematischer Hintergrund**
- **Zusammenfassung und zukünftige Erweiterungen**
- **Diskussion**